

Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel (1)

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 1 Soient V un espace vectoriel et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des formes linéaires sur V .

- (a) Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ engendrent V^* ssi $\bigcap_{i=1}^n \ker \lambda_i = \{0\}$.
- (b) Quel lien pouvez-vous faire entre la dimension du sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et celle de $\bigcap_{i=1}^n \ker \lambda_i$?

Exercice 2 Soit V, W deux k -espaces vectoriels et $f \in \text{Hom}_k(V, W)$. On note $f^* \in \text{Hom}_k(W^*, V^*)$ l'application duale.

- (a) Montrer

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f^* \text{ surjective} \quad f \text{ surjective} \Leftrightarrow f^* \text{ injective.}$$

- (b) Soit (w_1, \dots, w_n) une base de W . On pose $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ avec $\lambda_i \in V^*$. Montrer que l'image de f^* est le sous-espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- (c) En déduire $\dim \ker f + \dim \text{im } f^* = \dim V$ puis $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^*)$.

Exercice 3 Soit V un k -espace vectoriel et W un sous-espace de V .

- (a) Montrer que le dual de V/W s'identifie à $\{\lambda \in V^*; \lambda|_W = 0\}$.
- (b) Soit $f \in \text{End}(V)$. Montrer que W est stable par f si et seulement si $(V/W)^*$ est stable par $f^* \in \text{End}(V^*)$.

Exercice 4 Soit V, W des espaces vectoriels de bases respectives $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(w_j)_{1 \leq j \leq n}$. Soit $f \in \text{Hom}_k(V, W)$, de matrice M dans ces bases. Déterminer la matrice de f^* dans les bases duales $(w_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ et $(v_i^*)_{1 \leq i \leq m}$.

Exercice 5 Soit (v_1, \dots, v_n) une base de k^n . On note M sa matrice dans la base canonique. Exprimer en fonction de M la matrice de la base duale (v_1^*, \dots, v_n^*) dans la base duale de la base canonique.

Exercice 6 Soit λ une forme linéaire sur $M_n(k)$ telle que $\lambda(AB) = \lambda(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(k)$. Montrer que λ est proportionnelle à la trace.

Exercice 7 Soit E, F des k -espaces vectoriels de même dimension et $\Phi : E \times F \rightarrow k$ une forme bilinéaire. On note $\Phi_E : E \rightarrow F^*$ l'application $x \in E \mapsto \Phi(x, \cdot)$ et on définit $\Phi_F : F \rightarrow E^*$ de manière analogue.

- (a) Montrer que Φ_E et Φ_F sont duales.
- (b) Montrer que si Φ_E est injectif alors Φ_E et Φ_F sont des isomorphismes.
- (c) On ne suppose plus $\dim E = \dim F$. Montrer que si Φ_E et Φ_F sont injectifs alors ce sont des isomorphismes.

Exercice 8 Soient E, F des k -espaces vectoriels. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in E^*$ et $\mu_1, \dots, \mu_r \in F^*$. Montrer que le rang de la forme bilinéaire $\Phi : E \times F \rightarrow k$ définie par $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y)$ est $\leq r$.

Exercice 9 Soit E un k -espace vectoriel et $\Phi : E \times E \rightarrow k$ une forme bilinéaire symétrique. On note $\Phi_E : E \rightarrow E^*$ l'application linéaire associée.

- (a) Soit F un supplémentaire de $\ker \Phi_E$ dans E . Montrer que la restriction de Φ à F est non dégénérée.
- (b) Réciproquement, soit F un sous-espace de E tel que $\Phi|_{F \times F}$ est non dégénérée. Montrer que F est inclus dans un supplémentaire de $\ker \Phi_E$.

Exercice 10 Soit E un k -espace vectoriel et $\Phi : E \times E \rightarrow k$ une forme bilinéaire symétrique.

- (a) Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E , montrer $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.
- (b) Si de plus Φ est non dégénérée, montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Exercice 11 Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer le rang, le noyau, et une base dans laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale.

- (a) $q(x, y) = x^2 + xy - y^2$ sur \mathbf{R}^2 ;
- (b) $q(x, y, z) = xy + yz$ sur \mathbf{R}^3 ;
- (c) $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$ sur \mathbf{R}^4 .

Exercice 12 On suppose $\text{car}(k) \neq 2$. Soit $q : M_n(k) \rightarrow k$ l'application définie par $q(M) = \text{Tr}(M \cdot {}^tM)$.

- (a) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.
- (b) Lorsque $k = \mathbf{R}$, déterminer la signature de q .
- (c) Mêmes questions pour $q(M) = \text{Tr}(M^2)$ et $q(M) = (\text{Tr } M)^2$.