Agrégation ENS Lyon
2008/2009

Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel (2)

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 1 Soit E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des formes quadratiques sur E est un k-espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de $\mathcal{Q}$?
3. On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives) est un convexe de $\mathcal{Q}$.

Exercice 2 Si E est un k-espace vectoriel, deux formes quadratiques $q, q' : E \to k$ sont dites équivalentes s'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $q' = q \circ u$.

1. On suppose $k = \mathbf{C}$ et $E = \mathbf{C}^n$. Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur E ?
2. Même question pour $k = \mathbf{R}$ et $E = \mathbf{R}^n$.
3. On suppose $k = \mathbf{Q}$ et $E = \mathbf{Q}^2$. Les formes quadratiques $q(x, y) = x^2+y^2$ et $q'(x, y) = x^2 + 2y^2$ sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il existe une infinité de formes quadratiques sur $\mathbf{Q}^2$ deux à deux non équivalentes.

Exercice 3 Soit E un k-espace vectoriel. Montrer que $q : E \to k$ est une forme quadratique si et seulement si $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($\lambda \in k$, $x \in E$) et $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 4 Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, de signature (r, s). Montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ totalement isotrope pour q, de dimension $\min(r, s)$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$, $r = s = 1$).

Exercice 5 Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} x_i x_j.$$

1. Déterminer la signature de q.
2. Calculer le maximum de q sur le compact C donné par

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Exercice 6 Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $M = R^2$.

Exercice 7 (Décomposition polaire) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique définie positive et une matrice Ω dans $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ telles que $A = S\Omega$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe.
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'application $(S, \Omega) \mapsto S\Omega$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S} \times \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
4. Déduire de la question précédente que $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 8 Soit E un k-espace vectoriel et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit u une application de E dans E telle que $u(0) = 0$ et $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $u \in O(q)$.

Exercice 9 Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbf{R}^n$ telle que $q(gx) = q(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathbf{R}^n$.
2. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$.

Exercice 10 Soit $u \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et $F_u = \{x \in \mathbf{R}^n ; u(x) = x\}$.

1. Montrer que u est produit de k réflexions orthogonales, avec $k \leq n$.
2. Soit k_u le plus petit entier k tel que u est produit de k réflexions orthogonales. Montrer que $k_u = n - \dim F_u$.
3. Si n est impair et $u \in \mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$, montrer que u possède une droite fixe.
4. Soit $u \in \mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$ avec $n \geq 3$. Montrer que u est produit d'au plus n renversements orthogonaux (symétries orthogonales par rapport à un sous-espace de codimension 2 dans $\mathbf{R}^n$).

Exercice 11 Montrer que le centre de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ est $\{\mathrm{id}\}$ (*Indication* : utiliser l'exercice 10.3).