Agrégation ENS Lyon
2008/2009

Groupes et géométrie (1)

Exercice 1 Montrer que tout groupe engendré par un élément est isomorphe à $\mathbf{Z}$ ou à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n \geq 1$.

Exercice 2 Un groupe engendré par deux éléments est-il nécessairement abélien ? Donner un exemple où le groupe est fini (resp. infini).

Exercice 3 Montrer que tout groupe d'ordre n est engendré par une partie de cardinal $\leq \log_2 n$.

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre n tel que pour tout diviseur d de n, l'ensemble des $x \in G$ tels que $x^d = 1$ ait au plus d éléments. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. En déduire que si k est un corps, tout sous-groupe fini de k^* est cyclique.

Exercice 5 Soit G un groupe abélien, et soient x et y des éléments d'ordre fini de G. Montrer que G contient un élément dont l'ordre est le PPCM des ordres de x et y. (*Indication* : on pourra commencer par le cas où ces ordres sont premiers entre eux.)

Exercice 6 L'*exposant* d'un groupe fini G est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in G$. Déduire de l'exercice précédent que si G est un groupe abélien fini d'exposant n, il existe $x \in G$ d'ordre n. Trouver un groupe fini non abélien pour lequel cette propriété est fausse.

Exercice 7 Soient x et y des éléments d'un groupe G. Montrer que xy et yx ont même ordre (éventuellement infini).

Exercice 8 Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On appelle *normalisateur* de H dans G l'ensemble $N_H = \{x \in G,\ xHx^{-1} = H\}$.

1. Montrer que N_H est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
2. Si K est un sous-groupe de G contenant H tel que H est distingué dans K, alors $K \subset N_H$. En déduire que N_H est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Si K est un sous-groupe de N_H, alors KH est un groupe et H est distingué dans KH.

4. On appelle sous-groupe conjugué de H tout sous-groupe de la forme xHx^{-1} avec $x \in G$. Montrer que le nombre de sous-groupes conjugués de H dans G est égal à l'indice (éventuellement infini) de N_H dans G. (*Indication* : on pourra définir une action convenable de G sur l'ensemble de ses sous-groupes.)

Exercice 9 Soient E un ensemble et G un groupe fini agissant transitivement sur E. Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E,\ g \cdot x = x\}$.

1. Montrer que lorsque g parcourt G, la moyenne des $\mathrm{card}\,\mathrm{Fix}(g)$ vaut 1. (*Indication* : considérer l'ensemble $\{(g, x) \in G \times E, gx = x\}$.)
2. On suppose $\mathrm{card}\, E \geq 2$. Déduire de (1) que G possède un élément qui n'a pas de point fixe dans E.

Exercice 10

1. Soit G un groupe et Z un sous-groupe du centre de G. On suppose que G/Z est monogène. Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 11 Soit G un groupe. On suppose que le groupe des automorphismes de G est monogène. Montrer que G est abélien. (*Indication* : on pourra utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 12 Pour tout nombre premier p, donner un exemple de groupe d'ordre p^3 non abélien.

Exercice 13 Soit G un groupe fini. On suppose que G est engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2.

(a) Montrer que le sous-groupe engendré par $t = ss'$ est distingué dans G.

(b) Soit n l'ordre de t. Montrer $n \geq 2$ et $\mathrm{card}\, G = 2n$.

(c) En déduire que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.

(d) Que peut-on dire d'un groupe *infini* engendré par deux éléments distincts d'ordre 2 ?

Exercice 14 Pour quels entiers $n \geq 1$ est-il vrai que tout groupe d'ordre n est abélien ? Même question en remplaçant abélien par cyclique.