Agrégation ENS Lyon
2008/2009

Groupes et géométrie (2)

Exercice 1. Soit G un groupe d'ordre n. On suppose qu'il existe $x \in G$ tel que pour tout nombre premier p divisant n, on ait $x^{n/p} \neq 1$. Montrer que G est cyclique et engendré par x.

Exercice 2.

a) Montrer que tout sous-groupe fini de $U_1 = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$ est cyclique, engendré par une racine de l'unité.

b) Montrer que tout sous-groupe infini de U_1 est dense.

Exercice 3.

a) Déterminer un générateur de $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$.

b) Combien ce groupe possède-t-il de générateurs ? d'automorphismes ? de sous-groupes ?

c) Mêmes questions pour $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^*$.

Exercice 4. Quel est l'ordre du groupe des puissances sixièmes de $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$?

Exercice 5. Les groupes $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^*$ et $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 6. Déterminer la structure du groupe $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^*$. Trouver explicitement les solutions de l'équation $x^2 = 1$ dans ce groupe. Quel est l'ordre du sous-groupe des carrés ?

Exercice 7. Soit G un groupe cyclique d'ordre 2^n. Montrer que x engendre G si et seulement si x n'est pas un carré dans G.

Exercice 8. Soit G un groupe abélien fini. Un *caractère* de G est un morphisme de groupes de G dans $\mathbf{C}^*$. Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

a) Vérifier que la multiplication définit une loi de groupe sur $\widehat{G}$.

b) Montrer que le groupe des caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à μ_n.

c) Pour tous groupes abéliens finis G_1 et G_2, montrer que $\widehat{G_1 \times G_2}$ est isomorphe à $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.

d) Déduire des questions précédentes que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.

e) Si H est un sous-groupe de G, montrer que $\widehat{G/H}$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $\widehat{G}$.

Exercice 9. Soit p premier et $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. On note $\zeta_p = e^{2i\pi/p}$. Pour tout caractère $\chi \in \widehat{G}$, on pose $S(\chi) = \sum_{x \in G} \chi(x) \cdot \zeta_p^x \in \mathbf{C}$.

a) Que vaut $S(1)$?

b) Pour tout $\chi \in \widehat{G}$, $\chi \neq 1$, montrer que $|S(\chi)| = \sqrt{p}$.

c) En déduire que la somme de Gauß $S = \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{2ik^2\pi}{p}}$ vérifie

$$S^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2 \\ p & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4 \\ -p & \text{si } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

(*Indication :* considérer le caractère χ de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ donné par $\chi(x) = \pm 1$ suivant que x est un carré ou non dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.)

Exercice 10. Déterminer les diviseurs élémentaires des groupes suivants :

a) $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

b) $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

c) $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$.

d) $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$.

Exercice 11. Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

a) $G = \mathbf{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle$.

b) $G = \mathbf{Z}^2/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v) \in \mathbf{Z}^2 \mapsto (u+v, u-v) \in \mathbf{Z}^2$.

c) $G = \mathbf{Z}^3/\langle(4,8,10),(6,2,0)\rangle$.

d) $G = \mathbf{Z}^3/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v,w) \in \mathbf{Z}^3 \mapsto (u-v, v-w, w-u) \in \mathbf{Z}^3$.

Exercice 12. Calculer une base adaptée de $\mathbf{Z}^n$ et les diviseurs élémentaires pour les sous-groupes suivants :

a) $G = \langle(1,1),(1,-1)\rangle \qquad (n=2)$.

b) $G = \langle(3,-6),(4,2)\rangle \qquad (n=2)$.

c) $G = \langle(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\rangle \qquad (n=3)$.

d) $G = \langle (1,-3,5),(2,-4,6)\rangle \qquad (n=3)$.

Exercice 13. Trouver une base des groupes abéliens suivants :

a) $G = \langle (2,5),(5,-1),(1,-2)\rangle \subset \mathbf{Z}^2$.

b) $G = \{(u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ u \equiv v \pmod 2\}$.

c) $G = \langle (1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle \subset \mathbf{Z}^3$.

d) $G = \{(u,v,w) \in \mathbf{Z}^3,\ u \equiv v \pmod 2, v \equiv w \pmod 3\}$.

Exercice 14. Soient $m,n \geq 1$ deux entiers. Montrer que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\mu\mathbf{Z}$, où δ et μ sont respectivement le PGCD et le PPCM de m et n.

Exercice 15. Soit $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 16. Soient G, H, K des groupes abéliens finis. Montrer que si $G \times H$ et $G \times K$ sont isomorphes, alors H est isomorphe à K. Le résultat subsiste-t-il en supposant seulement G, H, K abéliens de type fini ?

Exercice 17.

a) Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. On suppose que le cardinal de H est premier à l'indice de H dans G. Montrer qu'il existe un sous-groupe H' de G tel que G soit isomorphe à $H \times H'$.

b) Soit p premier impair et $k \geq 2$. Montrer que l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ vaut p^{k-1} (*Indication* : on pourra montrer par récurrence $(1+p)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{p^k}$.)

c) Déduire de a) et b) que $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ est cyclique pour tout $k \geq 2$.

Exercice 18. Soit $G = \{z = a + ib,\ |z| = 1, a, b \in \mathbf{Q}\}$.

a) Montrer que G est un sous-groupe de U_1.

b) Montrer que G n'est pas de type fini.