Groupes et géométrie (4)

Exercice 1. Soit K un corps et G un groupe d'ordre n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.

Exercice 2. Soit K un corps. Montrer que le centre de $GL_n(K)$ est isomorphe à K^*.

Exercice 3. Montrer que $\mathbf{C}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 4. Soit K un sous-corps de L tel que L est un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que L^* est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.

Exercice 5. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre une puissance de p. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ un morphisme de groupes.

(a) Grâce à la formule des classes, montrer qu'il existe $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ non nul tel que $\rho(g)(x) = x$ pour tout $g \in G$.

(b) Montrer qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ telle que $M\rho(G)M^{-1}$ soit un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de diagonale 1.

Exercice 6. Soit p un nombre premier et $n \geq 2$. Pour tout $1 \leq d \leq n-1$, montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ n'ayant aucun sous-espace stable de dimension d.

Exercice 7. Soit T le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ formé des matrices diagonales.

(a) Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $gTg^{-1} = T$. Montrer qu'il existe $t \in T$ et une matrice de permutation g_σ tels que $g = tg_\sigma$.

(b) En déduire que le normalisateur N de T dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ vérifie $N/T \cong \mathfrak{S}_n$ et qu'un ensemble de représentants du quotient est donné par les matrices de permutation.

(c) Montrer que le résultat subsiste lorsqu'on remplace $\mathbf{C}$ par un corps K de cardinal ≥ 3. Que se passe-t-il pour $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

Exercice 8. Soit B le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices triangulaires supérieures. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n.

(a) Montrer que tout sous-espace vectoriel de K^n stable par B est de la forme $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ avec $0 \leq k \leq n$.

(b) Montrer que le normalisateur de B dans $\mathrm{GL}_n(K)$ est B.

Exercice 9. Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ agit transitivement sur $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n ; ||x|| = 1\}$. Quel est le stabilisateur du point $(0, \dots, 0, 1)$?

Exercice 10. Déterminer toutes les applications $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ qui vérifient $f(gx) = gf(x)$ pour tout $g \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$.

Exercice 11. Soit H_8 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ engendré par les matrices $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H_8 est un groupe d'ordre 8 non commutatif.

b) Déterminer les sous-groupes de H_8. Lesquels sont cycliques ? distingués dans H_8 ?

c) Déterminer le centre Z de H_8, ainsi que H_8/Z.

Exercice 12. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O(n)$, et que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $U(n)$.

Exercice 13. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ (*Indication :* montrer qu'un tel groupe stabilise un réseau).

Exercice 14. Déterminer (un ensemble de représentants pour) les classes de conjugaison des groupes suivants : $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.