ENS Lyon
Préparation Agrégation

Rappels d'algèbre
2009-2010

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 Soit E, F des ensembles, et $f : E \to F$ une application quelconque.

1. Montrer que $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ définit une relation d'équivalence sur E.
2. Soit $X = E/\sim$ et $\pi : E \to X$ la surjection canonique. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f} : X \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$.
3. Montrer que $\overline{f}$ est injective et π est surjective. Peut-on écrire $f = g \circ h$ avec g surjective et h injective ?

Exercice 2

1. Parmi les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, lesquels sont distingués ?
2. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$, et les quotients associés ?

Exercice 3 Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G et que $G/H \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 4 Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe distingué.

1. Montrer que tout sous-groupe de G/H est isomorphe à K/H pour un certain sous-groupe $H \subset K \subset G$.
2. Montrer qu'il y a une bijection entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H.
3. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ avec $d|n$.

Exercice 5 Soit M un groupe abélien.

1. Montrer que tout morphisme de groupes $f : \mathbf{Z} \to M$ est de la forme $f(k) = km$ pour un certain $m \in M$.
2. À quoi est isomorphe le groupe $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, M)$?
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, M)$ est isomorphe à $\{m \in M; nm = 0\}$.
4. Calculer $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$.

Exercice 6 Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe distingué. Soit K un sous-groupe quelconque de G.

1. Montrer que $KH = \{kh; k \in K, h \in H\}$ est un sous-groupe de G. Donner un contre-exemple dans le cas où H n'est pas distingué dans G.
2. Montrer que $K \cap H$ est distingué dans K.

3. Montrer l'isomorphisme $KH/H \cong K/(K \cap H)$.

Exercice 7 Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On note G/H l'ensemble des classes gH lorsque g parcourt G. Le groupe G agit par multiplication à gauche sur G/H, ce qui donne un morphisme

$$\rho : G \to \mathfrak{S}(G/H).$$

1. On note $K = \ker \rho$. Montrer que $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ et que K est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.
2. Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $\operatorname{card} G$. Montrer que tout sous-groupe d'indice p de G est distingué.
3. Montrer que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 8 On considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^2$.

1. Quelles sont les orbites ?
2. On fait maintenant agir $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$. Montrer que l'action est transitive.
3. Qu'en est-il de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sur l'ensemble des droites affines de $\mathbf{R}^2$?
4. Déterminer le stabilisateur de la droite $D : y = 0$.
5. Déterminer le stabilisateur de la droite $D' : x + y = 1$ et montrer qu'il est isomorphe à $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbf{R}^*; b \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 9 On considère l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\sigma \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{\sigma(i)} \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1. On suppose $n = 2$. Déterminer les points fixes de cette action.
2. Déterminer les droites (vectorielles) de $\mathbf{R}^2$ stables par $\mathfrak{S}_2$.
3. Si $n \geq 3$, montrer qu'il existe une unique droite stable par $\mathfrak{S}_n$, ainsi qu'un unique hyperplan stable par $\mathfrak{S}_n$.
4. Montrer qu'il n'y a pas d'autre sous-espace vectoriel stable par $\mathfrak{S}_n$.
5. Donner un ensemble de représentants du quotient $\mathbf{R}^n/\mathfrak{S}_n$.
6. Quel ensemble est naturellement en bijection avec $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$?

Exercice 10 Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble E non vide. Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de $g : E \to E$.

1. Montrer que lorsque g parcourt G, la moyenne de $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(g))$ est 1. (*Indication* : considérer $\{(g, x) \in G \times E,\ g \cdot x = x\}$)
2. Déduire de (1) que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ ($n \geq 2$) agissant transitivement sur $\{1, \dots, n\}$ possède un élément sans point fixe.