ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation

Rappels d'algèbre
2009-2010

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1 (Groupes de très petit cardinal)

1. Montrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ou à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. Montrer que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ou à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 2 (Petits groupes symétriques et alternés)

1. Donner les sous-groupes distingués, le centre et le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.
2. Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$?
3. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\ldots$, $\mathfrak{S}_{10}$?
4. Existe-t-il un morphisme de groupes surjectif de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathfrak{S}_3$? de $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathfrak{S}_4$? de $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathfrak{S}_3$?
5. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 3 (Parties génératrices)

1. Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est produit d'au plus $(n-1)$ transpositions, que l'on peut en outre suppposer distinctes.
2. Écrire le n-cycle $[1\,2\ldots n] \in \mathfrak{S}_n$ comme produit de $n-1$ transpositions. Est-il produit de k transpositions avec $k < n-1$?
3. Soit p premier. Montrer que pour tout p-cycle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_p$, on a $\mathfrak{S}_p = \langle \sigma, \tau \rangle$. Montrer que cela est faux dans $\mathfrak{S}_4$.
4. Les n-cycles engendrent-ils $\mathfrak{S}_n$? Lorsque c'est le cas, montrer que deux suffisent.

Exercice 4 (Points fixes)

1. Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments ?
2. Dénombrer les permutations sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 5 (Carrés dans le groupe symétrique)

1. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés de $\mathfrak{S}_n$.
2. Tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est-il le carré d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 6 (Commutant)

Le *commutant* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $\{\tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma\tau = \tau\sigma\}$. Calculer le cardinal du commutant de σ en fonction de la longueur des cycles intervenant dans la décomposition de σ. (*Indication* : on pourra commencer par traiter le cas où σ est un cycle.)

Exercice 7

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On dit que G agit k-transitivement si $k \leq \mathrm{Card}(X)$ et si pour tous $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_k$ des k-uplets d'éléments distincts de X, il existe $g \in G$ tel que pour tout i, $gx_i = y_i$.

1. Qu'est-ce qu'une action 1-transitive ?
2. Montrer que si G agit k-transitivement sur X, alors il agit l-transitivement pour tout $l \leq k$.
3. Donner un exemple de groupe agissant transitivement sur un ensemble, mais pas 2-transitivement.
4. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ agit n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Soit G un groupe agissant fidèlement et n-transitivement sur un ensemble X à n éléments, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
5. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ agit $(n-2)$-transitivement mais pas n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 8

Soit G un groupe et x et y des éléments d'ordre fini de G qui commutent. Montrer que G contient un élément dont l'ordre est le PPCM des ordres de x et y. (*Indication* : on pourra commencer par le cas où ces ordres sont premiers entre eux.)

Exercice 9

L'*exposant* d'un groupe fini G est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in G$. Déduire de l'exercice précédent que si G est un groupe abélien fini d'exposant n, il existe $x \in G$ d'ordre n. Trouver un groupe fini non abélien pour lequel cette propriété est fausse.

Exercice 10

Existe-t-il un groupe infini d'exposant fini ?

Exercice 11

Montrer que l'exposant de $\mathfrak{S}_n$ est égal au PPCM des entiers de 1 à n.

Exercice 12

Soient x et y des éléments d'un groupe G. Montrer que xy et yx ont même ordre (éventuellement infini).

Exercice 13

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On appelle *normalisateur* de H dans G l'ensemble $N_H = \{x \in G,\ xHx^{-1} = H\}$.

1. Montrer que N_H est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
2. Si K est un sous-groupe de G contenant H tel que H est distingué dans K, alors $K \subset N_H$. En déduire que N_H est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Si K est un sous-groupe de N_H, alors KH est un groupe et H est distingué dans KH.
4. On appelle sous-groupe conjugué de H tout sous-groupe de la forme xHx^{-1} avec $x \in G$. Montrer que le nombre de sous-groupes conjugués de H dans G est égal à l'indice (éventuellement infini) de N_H dans G. (*Indication* : on pourra définir une action convenable de G sur l'ensemble de ses sous-groupes.)

Exercice 14

1. Soit G un groupe et Z un sous-groupe du centre de G. On suppose que G/Z est monogène. Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 15

Soit G un groupe. On suppose que le groupe des automorphismes de G est monogène. Montrer que G est abélien. (*Indication* : on pourra utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 16

Pour tout nombre premier p, donner un exemple de groupe d'ordre p^3 non abélien.

Exercice 17

What is yellow and equivalent to the axiom of choice ?