Feuille d'exercices n°3

Exercice 1 (Groupes d'ordre une puissance d'un nombre premier)

Soient p un nombre premier et G un groupe fini non trivial d'ordre une puissance de p (G est appelé un p-groupe).

1. Soit X un ensemble fini muni d'une action de G. Montrer que les cardinaux de X et de l'ensemble des points fixes X pour cette action sont congrus modulo p.
2. Montrer que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.
3. Soit n dans $\mathbf{N}$ tel que p^n divise le cardinal de G. Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre p^n.
4. Montrer que le groupe dérivé de G n'est pas G tout entier.

Exercice 2 (Automorphismes intérieurs et extérieurs)

Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de groupes de G et $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est isomorphe au quotient $G/\mathrm{Z}(G)$.
3. Expliciter un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_3$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_3)$.
4. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$ est d'ordre 2.

Exercice 3 (Propriété universelle du quotient)

Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et π la projection canonique de G dans G/H. Soient G' un groupe et φ un morphisme de groupes de G dans G' dont le noyau contient H. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\widetilde{\varphi}$ de G/H dans G' vérifiant : $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.

Exercice 4

À isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 12 ? D'ordre 72 ?

Exercice 5

Déterminer les diviseurs élémentaires des groupes suivants :

1. $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$;
2. $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$;
3. $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$;
4. $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$.

Exercice 6

Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

1. $G = \mathbf{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle$;
2. $G = \mathbf{Z}^2/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v) \in \mathbf{Z}^2 \mapsto (u+v, u-v) \in \mathbf{Z}^2$;
3. $G = \mathbf{Z}^3/\langle(4,8,10),(6,2,0)\rangle$;
4. $G = \mathbf{Z}^3/\operatorname{im}(f)$ avec $f : (u,v,w) \in \mathbf{Z}^3 \mapsto (u-v, v-w, w-u) \in \mathbf{Z}^3$.

Exercice 7

Calculer une base adaptée de $\mathbf{Z}^n$ et les diviseurs élémentaires pour les sous-groupes suivants :

1. $G = \langle(1,1),(1,-1)\rangle \qquad (n=2)$;
2. $G = \langle(3,-6),(4,2)\rangle \qquad (n=2)$;
3. $G = \langle(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\rangle \qquad (n=3)$;
4. $G = \langle(1,-3,5),(2,-4,6)\rangle \qquad (n=3)$.

Exercice 8

Trouver une base des groupes abéliens suivants :

1. $G = \langle(2,5),(5,-1),(1,-2)\rangle \subset \mathbf{Z}^2$;
2. $G = \{(u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ u \equiv v \pmod 2\}$;
3. $G = \langle(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle \subset \mathbf{Z}^3$;
4. $G = \{(u,v,w) \in \mathbf{Z}^3,\ u \equiv v \pmod 2, v \equiv w \pmod 3\}$.

Exercice 9

Soient m et n deux entiers supérieurs à 1, δ et μ respectivement le PGCD et le PPCM de m et n. Montrer que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\mu\mathbf{Z}$.

Exercice 10

Soit G un groupe cyclique d'ordre 2^n. Montrer qu'un élément de G l'engendre si et seulement si il n'est pas un carré.

Exercice 11

Soit n un entier supérieur à 1. Montrer que tout morphisme de groupes surjectif de $\mathbf{Z}^n$ dans lui-même est un isomorphisme.

Exercice 12

Soient G, H et K des groupes abéliens finis. Montrer que si $G \times H$ et $G \times K$ sont isomorphes, alors H est isomorphe à K. Le résultat subsiste-t-il en supposant seulement G, H et K abéliens de type fini ?

Exercice 13

1. Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. On suppose que le cardinal de H est premier à l'indice de H dans G. Montrer qu'il existe un sous-groupe H' de G tel que G soit isomorphe à $H \times H'$.
2. Soit p un nombre premier différent de 2 et k un entier supérieur à 2. Montrer que l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ vaut p^{k-1} (*Indication* : on pourra montrer par récurrence $(1+p)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{p^k}$.).
3. Déduire des questions précédentes que $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ est cyclique pour tout entier k supérieur à 2.

Exercice 14

Soit G un groupe abélien fini. On appelle *caractère* de G un morphisme de groupes de G dans $\mathbf{C}^*$; on note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

1. Vérifier que la multiplication définit une loi de groupe sur $\widehat{G}$.
2. Montrer que le groupe des caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à μ_n.
3. Pour tous groupes abéliens finis G_1 et G_2, montrer que $\widehat{G_1 \times G_2}$ est isomorphe à $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.
4. Déduire des questions précédentes que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.
5. Si H est un sous-groupe de G, montrer que $\widehat{G/H}$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $\widehat{G}$.

Exercice 15

Soit U_1 le groupe des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que tout sous-groupe fini de U_1 est cyclique, engendré par une racine de l'unité.
2. Montrer que tout sous-groupe infini de U_1 est dense.

Exercice 16

Soit $G = \{z = a + ib,\ |z| = 1, a, b \in \mathbf{Q}\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de U_1.
2. Montrer que G n'est pas de type fini.

Exercice 17

1. Montrer qu'un morphisme de groupes défini sur un groupe simple est soit trivial, soit injectif.
2. Pour p un nombre premier, quels sont les p-groupes simples ?

Exercice 18 (Critères de cyclicité)

1. Soit G un groupe fini d'ordre n. On suppose qu'il existe x dans G tel que pour tout nombre premier p divisant n, on ait $x^{n/p}$ soit différent de 1. Montrer que G est cyclique et engendré par x.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que n est égal à la somme des indicatrices d'Euler de ses diviseurs positifs.
3. Soit G un groupe fini d'ordre n. On suppose que pour tout diviseur positif d de n, G possède au plus d éléments d'ordre divisant d. Montrer que G est cyclique.
4. Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps (commutatif) est cyclique.

Exercice 19

Soient p et q deux nombres premiers, avec q strictement plus grand que p. Soit G un groupe de cardinal pq et Q un sous-groupe d'ordre q de G (q-Sylow).

1. Montrer que Q est distingué dans G.
2. En déduire que G agit par conjugaison sur Q.
3. Quel est le cardinal de $\mathrm{Aut}(Q)$?
4. En déduire que si p ne divise pas $q-1$, G est cyclique.
5. Montrer que $\mathfrak{S}_5$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 15.

Exercice 20

Trouver les entiers n tels que tout groupe d'ordre n est cyclique. Même question avec abélien à la place de cyclique.