ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation

Rappels d'algèbre
2009-2010

Feuille d'exercices n°4

Exercice 1

Soit K un corps et G un groupe d'ordre n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.

Exercice 2

Soit K un corps et n un entier supérieur à 1. Montrer que le centre de $GL_n(K)$ est isomorphe à K^*.

Exercice 1

Soit K un corps.

1. Déterminer le centre de $\mathrm{SL}_n(K)$.
2. Montrer que l'inclusion de $\mathrm{SL}_n(K)$ dans $\mathrm{GL}_n(K)$ induit un morphisme de groupes de $\mathrm{PSL}_n(K)$ dans $\mathrm{PGL}_n(K)$.
3. Montrer que ce morphisme est injectif.
4. À quelle condition sur le corps K ce morphisme est-il surjectif ? Donner des exemples et des contre-exemples. Donner un critère plus précis lorsque K est fini.
5. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$
6. Montrer que, dans tous les autres cas, $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathbf{C}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.
2. Soient K et L deux corps tels que L est un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que L^* est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.

Exercice 6

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre une puissance de p. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ un morphisme de groupes.

(a) Grâce à la formule des classes, montrer qu'il existe x dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$, non nul, tel qu'on ait $\rho(g)(x) = x$ pour tout g dans G.

(b) Montrer qu'il existe M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ telle que $M\rho(G)M^{-1}$ soit un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de diagonale 1.

Exercice 7

Soit p un nombre premier et $n \geq 2$. Pour tout $1 \leq d \leq n-1$, montrer qu'il existe g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ n'ayant aucun sous-espace stable de dimension d.

Exercice 8

Soit T le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ formé des matrices diagonales.

(a) Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $gTg^{-1} = T$. Montrer qu'il existe $t \in T$ et une matrice de permutation g_σ tels que $g = tg_\sigma$.

(b) En déduire que le normalisateur N de T dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ vérifie $N/T \cong \mathfrak{S}_n$ et qu'un ensemble de représentants du quotient est donné par les matrices de permutation.

(c) Montrer que le résultat subsiste lorsqu'on remplace $\mathbf{C}$ par un corps K de cardinal ≥ 3. Que se passe-t-il pour $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

Exercice 9

Soit B le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices triangulaires supérieures. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n.

(a) Montrer que tout sous-espace vectoriel de K^n stable par B est de la forme $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ avec $0 \leq k \leq n$.

(b) Montrer que le normalisateur de B dans $\mathrm{GL}_n(K)$ est B.

Exercice 10

Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ agit transitivement sur $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n; ||x|| = 1\}$. Quel est le stabilisateur du point $(0, \ldots, 0, 1)$?

Exercice 11

Déterminer toutes les applications $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ qui vérifient $f(gx) = gf(x)$ pour tout $g \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$.

Exercice 12

Soit H_8 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ engendré par les matrices $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_8 est un groupe d'ordre 8 non commutatif.
2. Déterminer les sous-groupes de H_8. Lesquels sont cycliques ? distingués ?
3. Déterminer le centre Z de H_8, ainsi que H_8/Z.

Exercice 14

Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ (*Indication :* montrer qu'un tel groupe stabilise un réseau).

Exercice 15

Déterminer (un ensemble de représentants pour) les classes de conjugaison des groupes suivants : $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.