# Feuille d'exercices n°5

**Exercice 1** Soit $A$ un anneau. Montrer les relations $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ et $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$ pour tout $a \in A$.

**Exercice 2** Soit $A$ un anneau intègre et $S_1, \ldots, S_n$ des parties infinies de $A$. Soit $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\widetilde{P}|_{S_1 \times \cdots \times S_n} = 0$. Montrer que $P = 0$.

**Exercice 3** Montrer que tout anneau (commutatif) intègre fini est un corps.

**Exercice 4** Soit $k$ un corps et $A$ une $k$-algèbre associative et unitaire. On suppose que $A$ est (commutative) intègre et de dimension finie sur $k$. Montrer que $A$ est un corps. Le résultat subsiste-t-il si $A$ est de dimension infinie ?

**Exercice 5** Trouver quatre anneaux (commutatifs) de cardinal 4, deux à deux non isomorphes.

**Exercice 6** Soit $K$ un corps et $P \in K[X]$ de degré $n$. Montrer que le $K$-espace vectoriel $K[X]/(P)$ admet pour base $(\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{n-1})$.

**Exercice 7** Comment le résultat de l'exercice précédent se généralise-t-il si l'on remplace le corps $K$ par un anneau $A$ ?

**Exercice 8** Soit $K$ un corps et $a, b$ deux éléments distincts de $K$. Montrer que l'anneau $K[X]/((X-a)(X-b))$ est isomorphe à $K \times K$ (considérer $P \mapsto (P(a), P(b))$). Expliciter l'isomorphisme réciproque.

**Exercice 9** Soit $K$ un corps. Montrer les isomorphismes d'anneaux suivants :

1. $K[X,Y]/(Y^2 - X^3) \cong K[T^2, T^3]$ ;
2. $K[X,Y]/(XY - 1) \cong K[T, \frac{1}{T}]$.

**Exercice 10** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$. Cette écriture est-elle unique, à permutation et aux signes de $A$ et $B$ près ?

**Exercice 11** Soit $K$ un corps. On note $\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i - X_j)$. Pour $n \in \{2, 3\}$, exprimer $\Delta^2$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.

**Exercice 12** Exprimer les polynômes suivants en termes des polynômes symétriques élémentaires : $X^2+Y^2+Z^2$ ; $X^2(Y+Z)+Y^2(X+Z)+Z^2(X+Y)$.

**Exercice 13** Soit $F = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \mathbf{C}$. Montrer que $F \in \mathbf{Z}[X]$ si et seulement si pour tout polynôme symétrique $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, on a $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}$.

**Exercice 14** Montrer que tout polynôme antisymétrique $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ s'écrit de manière unique $P = \Delta \cdot Q$ avec $Q \in K[X_1, \ldots, X_n]$ symétrique (on pourra commencer par le cas $n = 2$).