ÉNS Lyon — Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation — 2009-2010

# Feuille d'exercices n°6

**Exercice 1** Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme symétrique. Montrer que les composantes homogènes de $P$ sont symétriques.

**Exercice 2** Soit $K$ un corps infini. Montrer que $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ est homogène de degré $d \geq 0$ si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ et tout $\lambda \in K$, on a $P(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d P(x_1, \ldots, x_n)$.

**Exercice 3** Soit $I$ un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

1. On suppose que $I$ est engendré par des polynômes homogènes $P_1, \ldots, P_r$ avec $r \geq 1$. Montrer que si $P$ est dans $I$, alors les composantes homogènes de $P$ le sont aussi.
2. Réciproquement, supposons que $P \in I$ entraîne que toutes les composantes homogènes de $P$ sont dans $I$. Montrer que $I$ est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes.

**Exercice 4**

1. Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène. On suppose $P = FG$ avec $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que $F$ et $G$ sont homogènes.
2. *Application :* $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ si $n \geq 2$.
3. Le polynôme $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ est-il irréductible dans $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ?

**Exercice 5** Soit $K$ un corps. Pour $F, G \in K[[T]]$, on pose $d(F, G) = 2^{-\operatorname{val}(F-G)}$ (avec la convention $d(F, F) = 0$).

1. Montrer que $(K[[T]], d)$ est un espace métrique.
2. Montrer que les applications $(F, G) \mapsto F + G$ et $(F, G) \mapsto FG$ sont continues.
3. Montrer que $K[T]$ est dense dans $K[[T]]$.
4. Soit $G \in K[[T]]$ tel que $\operatorname{val}(G) \geq 1$. Montrer que le morphisme $F \in K[T] \mapsto F \circ G \in K[[T]]$ se prolonge par continuité en un endomorphisme de la $K$-algèbre $K[[T]]$.

5. À quelle condition $F \mapsto F \circ G$ est-il un isomorphisme ?

**Exercice 6** Soit $K$ un corps et $I$ un idéal non nul de $K[[T]]$. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $I$ soit l'idéal principal engendré par $T^n$. Montrer alors que l'anneau $K[[T]]/I$ est isomorphe à $K[T]/(T^n)$.

**Exercice 7** **(Séries formelles et combinatoire)** Pour $n \geq 0$, on définit la série formelle $S_n = \sum_{k \geq 0} S(n,k) T^k$ dans $\mathbf{Q}[[T]]$, avec

$$S(n,k) = \mathrm{Card}\{(k_1, \ldots, k_n) \ \in \mathbf{N}^n ; k_1 + \cdots + k_n = k\}.$$

1. Montrer l'identité

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} (\sum_{k_i \geq 0} T^{k_i}).$$

2. Montrer que $S'_n = n S_{n+1}$, puis que $S(n,k) = C_{n+k-1}^{k-1}$.
3. En déduire la dimension du $K$-espace vectoriel $K[X_1, \ldots, X_n]_d$.

**Exercice 8** **(Relations de Newton)** Soit $K$ un corps et $n \geq 2$. Pour tout $k \geq 0$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$ (avec la convention $S_0 = n$).

1. Exprimer les coefficients de $F = \prod_{i=1}^{n} (T - X_i) \in (K[X_1, \ldots, X_n])[T]$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
2. Soit $B$ un anneau et $P = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k T^k \in B[T]$. Pour tout $c \in B$, donner explicitement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P$ par $T - c$.
3. En déduire une expression de $F/(T - X_i)$ en termes des polynômes symétriques élémentaires.
4. En exprimant de deux manières $\frac{\partial F}{\partial T}$, démontrer les relations suivantes

$$S_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} + (-1)^k k \Sigma_k = 0 \qquad (1 \leq k \leq n).$$

5. En évaluant $T^{k-n} F$ en $X_i$, montrer que

$$S_k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Sigma_j S_{k-j} = 0 \qquad (k \geq n).$$

6. Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 0$, le morphisme de $K$-algèbres $K[T_1, \ldots, T_n] \to K[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ défini par $T_i \mapsto S_i$, est un isomorphisme.