Feuille d'exercices n°7

Exercice 1 Montrer que le seul morphisme de K-algèbres de $K[[T]]$ dans K est l'évaluation en 0, définie par $e : \sum_{n\geq 0} a_n T^n \mapsto a_0$.

Exercice 2 Pour $n \geq 1$, on note D_n le nombre de *dérangements* de $\{1,\dots,n\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe. On pose $D_0 = 1$ et $D(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} T^n \in \mathbf{Q}[[T]]$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} T^n = e^T \cdot D(T)$ dans $\mathbf{Q}[[T]]$.
3. En déduire que $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 3 Soient A et B des anneaux intègres, de corps des fractions respectifs K et L. Montrer que tout morphisme d'anneaux injectif $\varphi : A \to B$ se prolonge de manière unique en un morphisme de corps $\widehat{\varphi} : K \to L$.

Exercice 4 Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un anneau euclidien pour la norme $N(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$.

Exercice 5 Le but de cet exercice est de décrire les éléments irréductibles de l'anneau $A = \mathbf{Z}[i]$. Pour tout a dans A, on note $N(a) = |a|^2$.

1. Montrer que A est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 1)$.
2. Soit p un nombre premier impair. Montrer que le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ contient $\frac{p+1}{2}$ éléments qui sont des carrés.
3. Montrer que $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
4. À quelle condition la classe de -1 mod p est-elle un carré dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$?
5. Montrer que l'anneau A/pA est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[X]/(X^2 + \overline{1})$.
6. Quels sont les nombres premiers de $\mathbf{Z}$ qui restent premiers dans A ?
7. Soit p un nombre premier de $\mathbf{Z}$ qui ne reste pas premier dans A. Montrer que p s'écrit comme produit de deux irréductibles u et v de A qui sont conjugués complexes l'un de l'autre et tels que $N(u) = N(v) = p$.

8. Déterminer l'ensemble des nombres premiers de $\mathbf{Z}$ qui s'écrivent comme somme de deux carrés.
9. Montrer que tout élément irréductible de A divise un élément irréductible de $\mathbf{Z}$. En déduire les éléments irréductibles de A.

Exercice 6 Montrer que $\mathbf{C}[X^2, X^3]$ n'est pas factoriel.

Exercice 7 On note $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et $\varphi : \mathbf{R}[X, Y] \to \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ le morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres défini par $\varphi(X) = \cos$ et $\varphi(Y) = \sin$. Par définition, l'anneau A des polynômes trigonométriques est l'image de φ. Le but de cet exercice est de montrer que A n'est pas factoriel.

1. Montrer que $\ker \varphi = (X^2 + Y^2 - 1)$.
2. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux $\psi : A \to \mathbf{R}(t)$ vérifiant $\psi(\cos) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ et $\psi(\sin) = \frac{2t}{t^2+1}$.
3. Montrer que tout $F \in \psi(A)$ est de la forme $F = \frac{P(t)}{(t^2+1)^n}$ avec $n \geq 0$, $P \in \mathbf{R}[t]$ de degré $\leq 2n$, et P non divisible par $t^2 + 1$.
4. Montrer que cos est irréductible dans A.
5. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que A n'est pas factoriel.

Exercice 8 Soit p premier. Pour tout $n \geq 1$, montrer que le polynôme cyclotomique Φ_{p^n} est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 9 Le but de cet exercice est de montrer que le polynôme $P = X^n - X - 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ pour $n \geq 2$.

1. Traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. On suppose $n \geq 4$. Montrer que les racines de P dans $\mathbf{C}$ sont simples et n'appartiennent pas à $\mathbf{Q}$.
3. Si Q est un diviseur de P dans $\mathbf{Z}[X]$, on pose
$$S(Q) = \sum_{Q(z)=0} z - \frac{1}{z}.$$
Montrer que $S(Q) \in \mathbf{Z}$ (utiliser les fonctions symétriques élémentaires des racines). Que vaut $S(P)$?
4. On suppose $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbf{Q}[X]$ unitaires de degré ≥ 2. Montrer que Q et R sont dans $\mathbf{Z}[X]$.
5. Si z est une racine de P, montrer que $\Re(z - \frac{1}{z}) > \frac{1}{|z|^2} - 1$.
6. En déduire $S(Q) \geq 1$ et conclure.