ÉNS Lyon
Préparation à l'agrégation

Rappels d'algèbre
2009-2010

Feuille d'exercices n°9

Exercice 1 Un sous-anneau d'un anneau intègre est-il intègre ? Même question avec noethérien, factoriel, principal, euclidien et toutes vos propriétés préférées pour les anneaux. Même question pour le quotient.

Exercice 2 Les groupes $(\mathbf{Q}, +)$ et $(\mathbf{Q}^\times, \times)$ sont-ils de type fini ?

Exercice 3 Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. À quelle condition K est-il un A-module de type fini ?

Exercice 4 Soient A un anneau intègre, n un entier supérieur ou égal à 1 et u un endomorphisme de A-modules de A^n.

1. Montrer que u est injectif si et seulement si son déterminant est non nul.
2. Montrer que u est surjectif si et seulement si son déterminant est un inversible de A.

Indication : on pourra raisonner dans le corps des fractions de A.

Exercice 5 Soit P le polynôme $X^4 + 1$ de $\mathbf{Z}[X]$.

1. Donner la décomposition de P en produits d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.
2. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$? Dans $\mathbf{Z}[X]$?

Exercice 6 Soient K un corps et L une extension de K ; soient P et Q des polynômes dans $K[X]$.

1. On suppose que Q divise P dans $L[X]$; montrer que c'est aussi le cas dans $K[X]$.
2. Montrer que le pgcd de P et Q dans $L[X]$ coïncide avec celui dans $K[X]$.

Exercice 7 Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions ; soient P et Q des polynômes à coefficients dans A. On suppose que P est unitaire et que Q divise P dans $K[X]$. Montrer que Q divise P dans $A[X]$.