ÉNS Lyon | Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation | 2009-2010

Feuille d'exercices n°10

Exercice 1

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$, unitaire. On suppose que P possède une racine dans $\mathbf{Q}$. Montrer que cette racine est dans $\mathbf{Z}$ et divise le coefficient constant de P.

Exercice 2

Montrer que le corps de décomposition de X^3-2 sur $\mathbf{Q}$ est une extension de degré 6 de $\mathbf{Q}$.

Exercice 3

Montrer que les poynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$: $3X^2-2X-10$, $2X^4+5X^3-10$, $2X^6-15$, $X^5+7X^4+X^2+6X+1$, X^n-2 pour n entier supérieur à 2.

Exercice 4

1. Trouver un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$, non nul et ayant $3-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ comme racine.
2. En déduire une expression de l'inverse de $3-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ comme un polynôme en $\sqrt[3]{2}$ et à coefficients dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 5

Montrer que le seul endomorphisme d'anneau de $\mathbf{R}$ est l'identité.

Exercice 6

Montrer que le sous-corps de $\mathbf{R}$ formé des réels algébriques sur $\mathbf{Q}$ est une extension de degré infini de $\mathbf{Q}$.

Exercice 7

Soient K un corps et L une extension de K ; on suppose L algébriquement clos. Montrer que l'ensemble des éléments de L qui sont algébriques sur K forme une clôture algébrique de K.

Exercice 8

Soient K un corps et P un polynôme à coefficients dans K, de degré d. Montrer que P est irréductible si et seulement si il n'existe pas d'extension de K de degré inférieur ou égal à $d/2$ dans laquelle P a une racine.

Exercice 9

Soient p un nombre premier et P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, de degré n. Montrer que P est irréductible si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. P divise $X^{p^n} - X$;
2. pour tout nombre premier ℓ divisant n, les polynômes P et $X^{p^{n/\ell}} - X$ sont premiers entre eux.

Exercice 10

Soient K un corps, P un polynôme à coefficients dans K, irréductible, et L une extension finie de K de degré premier au degré de P. Montrer que P est encore irréductible dans $L[X]$.

Exercice 11 (Polynômes cyclotomiques - faits de base)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $\mu_n^\times$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$ qui sont primitives. On définit le n-ième polynôme cyclotomique Φ_n dans $\mathbf{C}[X]$ par

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n^\times} (X - \zeta).$$

1. Quel est le degré d'un polynôme cyclotomique ?
2. Soit n dans $\mathbf{N}^*$; montrer que $X^n - 1$ est le produit des polynômes $\Phi_d(X)$ lorsque d décrit les diviseurs positifs de n.
3. Montrer (par exemple, par récurrence) que les polynômes cyclotomiques sont à coefficients dans $\mathbf{Q}$, puis dans $\mathbf{Z}$.
4. Montrer que le coefficient constant d'un polynôme cyclotomique vaut 1 ou -1.

Exercice 12 (Polynômes cyclotomiques - calculs et exemples)

1. Soit n impair, montrer que $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$.
2. Soit n pair, montrer que $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(X^2)$.
3. Soit p premier ne divisant pas n, montrer que $\Phi_n(X)\Phi_{np}(X) = \Phi_n(X^p)$.
4. Soit p premier divisant n, montrer que $\Phi_{np}(X) = \Phi_n(X^p)$.

5. Calculer Φ_n pour les petites valeurs de n.

Exercice 13

Trouver tous les entiers a et b premiers entre eux tels que $\cos(2\pi a/b)$ est rationnel.

Exercice 14

Soit P le polynôme $X^4 + X + 1$ de $\mathbf{Q}[X]$

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. Soit L un corps de rupture de P sur $\mathbf{Q}$. Montrer que L ne contient pas de sous-corps de degré 2 sur $\mathbf{Q}$.

   Indication : raisonner par l'absurde en considérant la décomposition de P en facteurs irréductibles sur un tel sous-corps.

Exercice 15

1. Soit K une extension de degré 2 de $\mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe un entier relatif d, non nul et sans facteur carré, tel que K soit isomorphe au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.
2. Soient d et d' deux entiers relatifs non nuls, sans facteur carré et distincts ; montrer qu'il n'existe pas de morphisme de corps de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d'})$.

Exercice 16 (Un exemple de réel transcendant)

1. Soient x un nombre réel, irrationnel et algébrique sur $\mathbf{Q}$, et d le degré du polynôme minimal de x sur $\mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif C tel que pour tout entier relatif p et tout entier strictement positif q on ait :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$

2. Soit α le nombre réel limite de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n!}}$. Montrer que α est transcendant.