# Feuille d'exercices n°12

**Exercice 1**

Calculer le résultant par rapport à la variable $X$ des polyômes $XY-1$ et $XY$.

**Exercice 2**

Déterminer l'intersection des coniques affines $C$ et $C'$ dans les cas suivants :

(a) $C : x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ et $C' : 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0$ ;

(b) $C : 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 0$ et $C' : 3x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.

**Exercice 3**

Déterminer une équation de la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (F(t), G(t))$ ($t \in \mathbf{R}$) dans les cas suivants :

(a) $F(t) = (t^2-1)/(t^2+1)$, $G(t) = 2t/(t^2+1)$ ;

(a) $F(t) = t^2 - 1$, $G(t) = t^3 + t^2$ ;

(b) $F(t) = t^2 + t + 1$, $G(t) = (t^2-1)/(t^2+1)$ ;

(c) $F(t) = (t+t^3)/(1+t^4)$, $G(t) = (t-t^3)/(1+t^4)$.

**Exercice 4**

Soient $K$ un corps et $P$ et $Q$ des polynômes à coefficients dans $K$. Donner un polynôme dont les racines sont exactement les images par $P$ des racines de $Q$.

**Exercice 5**

Soient $K$ un corps, $L$ une extension de $K$, $\alpha$ et $\beta$ deux éléments de $L$ algébriques sur $K$ et $P$ et $Q$ deux polynômes non nuls à coefficients dans $K$ annulant respectivement $\alpha$ et $\beta$. Donner un polynôme non nul à coefficients dans $K$ annulant $\alpha + \beta$ ; même question pour $\alpha\beta$.

**Exercice 6**

Soit $\alpha$ le nombre réel $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. À l'aide d'un résultant, déterminer un polynôme unitaire, à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et dont $\alpha$ est racine. Quel est le polynôme minimal de $\alpha$ sur $\mathbf{Q}$ ? Déterminer ses racines dans $\mathbf{C}$.

**Exercice 7**

Soient $K$ un corps, $p$ et $q$ des entiers, $P = a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_qX^q + \cdots + b_1X + b_0$ des polynômes à coefficients dans $K$ de degré inférieur respectivement à $p$ et $q$. On note $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{p} a_kX^kY^{p-k}$ et $\widetilde{Q} = \sum_{l=0}^{q} b_lX^lY^{q-l}$ les polynômes homogènes de $K[X,Y]$ respectivement associés à $P$ et à $Q$. Montrer que $\mathrm{res}_{p,q}(P,Q) = 0$ si et seulement si $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ ont un zéro commun dans $K^2 - \{0\}$.

**Exercice 8**

Soit $K$ un corps, $P$ un polynôme unitaire à coefficients dans $K$ et $Q$ un polynôme à coefficients dans $K$. Montrer que le resultant de $P$ et $Q$ est égal au déterminant de l'application $K$-linéaire de la $K$-algèbre de dimension finie $K[X]/(P)$ donnée par la multiplication par $Q$.

**Exercice 9**

Calculer $\mathrm{disc}(X^2 + bX + c)$ et $\mathrm{disc}(X^3 + pX + q)$.

**Exercice 10**

Soient $d$ un entier supérieur ou égal à 2 et $P$ un polynôme à coefficients réels, unitaire et de degré $d$. On note $n$ le nombre de racines réelles de $P$.

1. Montrer que $\mathrm{disc}(P) > 0$ entraîne $n \equiv d \pmod 4$, et que $\mathrm{disc}(P) < 0$ entraîne $n \equiv d - 2 \pmod 4$.
2. Comment se traduisent ces résultats pour le polynôme $X^3 + pX + q$ ?

**Exercice 11**

Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in K[X]$. Montrer que $\mathrm{disc}(P)$ est un polynôme à coefficients entiers en $a_0, \ldots, a_{p-1}$, et que ce polynôme est de degré total $2p - 2$.

**Exercice 12**

Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes unitaires de degrés respectifs $p$ et $q$. Exprimer $\mathrm{disc}(PQ)$ en fonction de $\mathrm{disc}(P)$, $\mathrm{disc}(Q)$ et $\mathrm{res}(P,Q)$.

**Exercice 13**

Calculer le discriminant du polynôme cyclotomique $\Phi_{p^\alpha}(X)$, où $p$ est un nombre premier (on pourra commencer par traiter le cas $\alpha = 1$).