ÉNS Lyon — Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation — 2009-2010

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 Redémontrer le théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 2 Toute matrice symétrique complexe est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 Soit V, W des espaces vectoriels de bases respectives $(v_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(w_j)_{1\leq j\leq n}$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, de matrice M dans ces bases. Déterminer la matrice de f^* dans les bases duales $(w_j^*)_{1\leq j\leq n}$ et $(v_i^*)_{1\leq i\leq m}$.

Exercice 4 Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de k^n. On note M sa matrice dans la base canonique. Exprimer en fonction de M la matrice de la base duale $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ dans la base duale de la base canonique.

Exercice 5 Soient V un espace vectoriel et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des formes linéaires sur V.

(a) Montrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ engendrent V^* ssi $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i = \{0\}$.

(b) Plus généralement, quel lien y a-t-il entre la dimension du sous-espace engendré par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et celle de $\cap_{i=1}^n \ker \lambda_i$?

Exercice 6 Soit V, W deux k-espaces vectoriels et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. On note $f^* \in \mathrm{Hom}_k(W^*, V^*)$ l'application duale.

(a) Montrer

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f^* \text{ surjective} \qquad f \text{ surjective } \Leftrightarrow f^* \text{ injective.}$$

(b) Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de W. On pose $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ avec $\lambda_i \in V^*$. Montrer que l'image de f^* est le sous-espace engendré par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(c) En déduire $\dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f^* = \dim V$ puis $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$.

Exercice 7 Soit V un k-espace vectoriel et W un sous-espace de V. Construire un isomorphisme naturel entre $(V/W)^*$ et $\{\lambda \in V^*; \lambda|_W = 0\}$.

Exercice 8 Soit λ une forme linéaire sur $M_n(k)$ telle que $\lambda(AB) = \lambda(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(k)$. Montrer que λ est proportionnelle à la trace.

Exercice 9 Soit E, F des k-espaces vectoriels et $\Phi : E \times F \to k$ une forme bilinéaire. On note $\Phi_E : E \to F^*$ l'application $x \in E \mapsto \Phi(x, \cdot)$ et on définit $\Phi_F : F \to E^*$ de manière analogue.

(a) Montrer que Φ_E et Φ_F sont duales.

(b) Montrer que si $\dim E = \dim F$ et Φ_E est injectif, alors Φ est non dégénérée.

(c) Montrer que si Φ_E et Φ_F sont injectifs, alors $\dim E = \dim F$ et Φ est non dégénérée.

Exercice 10 Soient E, F des k-espaces vectoriels. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in E^*$ et $\mu_1, \ldots, \mu_r \in F^*$. Montrer que le rang de la forme bilinéaire $\Phi : E \times F \to k$ définie par $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y)$ est $\leq r$.

Exercice 11 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On note $\Phi_E : E \to E^*$ l'application linéaire associée.

(a) Soit F un supplémentaire de $\ker \Phi_E$ dans E. Montrer que la restriction de Φ à $F \times F$ est non dégénérée.

(b) Réciproquement, soit F un sous-espace de E tel que $\Phi|_{F\times F}$ est non dégénérée. Montrer que F est inclus dans un supplémentaire de $\ker \Phi_E$.

Exercice 12 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique.

(a) Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E, montrer $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

(b) Si de plus Φ est non dégénérée, montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.