ÉNS Lyon — Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation — 2009-2010

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 Soit E un k-espace vectoriel. Deux formes quadratiques $q, q' : E \to k$ sont dites équivalentes s'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $q' = q \circ u$.

1. On suppose $k = \mathbf{C}$ et $E = \mathbf{C}^n$. Combien y a-t-il de classes d'équivalence de formes quadratiques sur E ? Donner un ensemble de représentants du quotient.
2. Mêmes questions pour $k = \mathbf{R}$ et $E = \mathbf{R}^n$.
3. On suppose $k = \mathbf{Q}$ et $E = \mathbf{Q}^2$. Les formes quadratiques $q(x, y) = x^2+y^2$ et $q'(x, y) = x^2 + 2y^2$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer le rang, le noyau, et une base dans laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale.

(a) $q(x, y) = x^2 + xy - y^2$ sur $\mathbf{R}^2$;
(b) $q(x, y, z) = xy + yz$ sur $\mathbf{R}^3$;
(c) $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$ sur $\mathbf{R}^4$.

Exercice 3 On suppose $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $q : M_n(k) \to k$ l'application définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M \cdot {}^{\mathrm{t}}M)$.

(a) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.
(b) Lorsque $k = \mathbf{R}$, déterminer la signature de q.
(c) Mêmes questions pour $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et $q(M) = (\mathrm{Tr}\, M)^2$.

Exercice 4 Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j.$$

1. Déterminer la signature de q.

2. Calculer le maximum de q sur le compact C donné par

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Exercice 5 Soit E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des formes quadratiques sur E est un k-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives) est un convexe de $\mathcal{Q}$.

Exercice 6 Soit E un k-espace vectoriel. Montrer que $q : E \to k$ est une forme quadratique si et seulement si $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($\lambda \in k$, $x \in E$) et $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 7 Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, de signature (r, s). Montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ totalement isotrope pour q, de dimension $\min(r, s)$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$, $r = s = 1$).

Exercice 8 Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $M = R^2$.

Exercice 9 Soit E un k-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire alternée.

1. On suppose $\dim_k E = 2$ et Φ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base (e_1, e'_1) de E telle que

$$\operatorname*{Mat}_{(e_1, e'_1)} \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose $\dim_k E = 2m$ ($m \geq 1$) et Φ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, e'_1, \dots, e_m, e'_m)$ de E telle que $\Phi(e_i, e_j) = \Phi(e'_i, e'_j) = 0$ et $\Phi(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq m$.
3. Montrer que si E est de dimension impaire, alors Φ est nécessairement dégénérée (on pourra se restreindre au cas $\mathrm{car}(k) \neq 2$).