ÉNS Lyon — Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation — 2009-2010

Feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (Décomposition polaire) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique définie positive et une matrice Ω dans $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telles que $A = S\Omega$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe.
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'application $(S, \Omega) \mapsto S\Omega$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S} \times \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 2 Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbf{R}^n$ telle que $q(gx) = q(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathbf{R}^n$.
2. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3 Soit Λ un réseau de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que $G_\Lambda = \{g \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}); g(\Lambda) = \Lambda\}$ est un groupe fini.
2. Le groupe des isométries affines de $\mathbf{R}^n$ laissant (globalement) stable Λ est-il fini ? de type fini ?
3. On suppose $n = 2$. Montrer que $\operatorname{card} G_\Lambda \leq 12$.
4. En utilisant l'exercice 2, en déduire que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ est de cardinal ≤ 12.

Exercice 4

1. Quels sont les sous-groupes finis de $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ qui laissent stable un réseau de $\mathbf{R}^2$?
2. Même question pour les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 5 Soit $u \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que u est produit d'au plus n réflexions orthogonales.
2. Soit k_u le plus petit entier k tel que u est produit de k réflexions orthogonales. Montrer que $k_u = n - \dim \ker(u - \mathrm{id})$.
3. Si n est impair et $u \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, montrer que u possède une droite fixe.
4. Supposons $u \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geq 3$. Montrer que u est produit d'au plus n renversements orthogonaux (symétries orthogonales par rapport à un sous-espace de codimension 2 dans $\mathbf{R}^n$).

Exercice 6 Montrer que le centre de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ est $\{1\}$ (*Indication* : utiliser l'exercice 5, question 3).

Exercice 7 Décrire le groupe orthogonal $\mathrm{SO}(q)$ de la forme quadratique $q(x, y) = xy$ sur $\mathbf{R}^2$. Quelles sont les orbites de l'action de $\mathrm{SO}(q)$ sur les droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$? sur les droites affines ?

Exercice 8 Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. Soit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle x, y \rangle = 0$ entraîne $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$. Montrer que u est une similitidue : il existe $\mu \in \mathbf{R}^{*+}$ tel que pour tout x, y, on ait $\langle u(x), u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$.

Exercice 9 Montrer que toute similitude de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) est le produit d'un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ (resp. U_n) et d'une homothétie. Que dire d'une similitude affine ?

Exercice 10 Soit E un k-espace vectoriel ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit u une application de E dans E telle que $u(0) = 0$ et $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $u \in \mathrm{O}(q)$ (on ne suppose pas u linéaire).

Exercice 11

1. Soit K un compact non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique boule fermée $B(a, r)$ ($a \in \mathbf{R}^n$, $r \geq 0$) contenant K et minimale pour l'inclusion.
2. Montrer que si G est un sous-groupe compact du groupe des isométries affines de $\mathbf{R}^n$, les éléments de G possèdent un point fixe commun.
3. En déduire que tout sous-groupe compact du groupe des isométries affines de $\mathbf{R}^n$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 12 Une bijection de $\mathbf{R}^2$ envoyant cercle sur cercle est-elle toujours une similitude affine ?