Géométrie Algébrique
TD1

Exercice 1 : Montrer que l'ensemble de points de la forme (t, t^2, t^3) de $\mathbb{A}^3$ est un ensemble algébrique.

Exercice 2 : Montrer que $SL_n(k)$ est un ensemble algébrique de $\mathbb{A}^{n^2}$.

Exercice 3 : Montrer que $V \subseteq \mathbb{A}^1$ est un ensemble algébrique si et seulement si $V = \mathbb{A}^1$ ou V est fini.

Exercice 4 : Décrire les fermés de Zariski de $V = V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$.

Exercice 5 : Soit $A \subseteq \mathbb{A}^n$, montrer que $V(I(A))$ est le plus petit ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n$ contenant A.

Exercice 6 : Soit $V \subseteq \mathbb{A}^n$ et $W \subseteq \mathbb{A}^m$ des ensembles algébriques. Montrer que $V \times W \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ est un ensemble algébrique.

Exercice 7 : Montrer les assertions suivantes

a) Si $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ alors $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$

b) $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

c) $V(I) = V(\sqrt{I})$

d) V est irréductible si et seulement si I est premier

Exercice 8 : Montrer que tout ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$ est fermé pour la topologie euclidienne.

Exercice 9 : Soit $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ non constant, irréductible. Montrer que $V(P)$ est irréductible.

Exercice 10 : Soit $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un ensemble algébrique. Montrer que V est irréductible si et seulement si tout ouvert non vide de V est dense dans V.

Exercice 11 : Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^2$ n'est pas la topolgie produit sur $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Exercice 12 : Soit $H \subseteq \mathbb{A}^n$ une hypersurface définie par un polynôme $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ non constant, et soit $P = c \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}$ la décompostion de P comme un produit de puissances de facteurs irréductibles distincts. Alors $I(H) = (P_1 \cdots P_r)$.