# Géométrie algébrique élémentaire – TD 10

Dans toute cette feuille, on travaille dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

**Exercice 1 – Dualité projective**

On note $\mathbf{P}^*$ l'ensemble des droites projectives de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

1. Montrer que l'application $(a : b : c) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mapsto V(aX + bY + cZ)$ est une bijection. On munit ainsi $\mathbf{P}^*$ d'une structure d'espace projectif.
2. Soit $P_0 \in \mathbf{P}$. Montrer que l'ensemble des droites $d \in \mathbf{P}^*$ passant par $P_0$ est une droite projective de $\mathbf{P}^*$.
3. Soit $d_0$ une droite de $\mathbf{P}$, et $P_0 \in \mathbf{P}$. On note $D_0 \in \mathbf{P}^*$ le point correspondant à $d_0$, et $p_0 \subset \mathbf{P}^*$ la droite associée à $P_0$ par la question précédente. Montrer que $P_0 \in d_0$ si et seulement si $D_0 \in p_0$.
4. Montrer que trois points $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{P}$ sont alignés si et seulement si les droites associées $p_1, p_2, p_3 \subset \mathbf{P}^*$ sont concourantes.
5. Soit $P_1, P_2 \in \mathbf{P}$ des points distincts, de droites associées $p_1, p_2 \subset \mathbf{P}^*$. Montrer que $p_1 \cap p_2$ n'est autre que la droite passant par $P_1$ et $P_2$.

**Exercice 2**

Soit $d \geq 1$ et $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{N_d}(\mathbf{C})$ l'espace projectif paramétrant les courbes projectives planes de degré $d$. Soit $P_0 \in C$. Montrer que (l'image réciproque dans $\mathbf{P}$ de) l'ensemble des courbes de degré $d$ passant par $P_0$ est un hyperplan linéaire de $\mathbf{P}$.

**Exercice 3 – Faisceaux de coniques**

Soit $\mathbf{P} = \mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ l'espace projectif paramétrant les coniques.

1. Montrer que l'application naturelle de $\mathbf{P}$ dans l'ensemble des coniques est une bijection.
2. On appelle *faisceau de coniques* un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}$ de dimension 1. Montrer que deux coniques distinctes étant données, il existe un unique faisceau les contenant, puis qu'on obtient de cette manière tous les faisceaux de coniques.
3. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques. Montrer que tout point $P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ appartient à au moins l'une des coniques de $\mathcal{F}$.

4. Soit $q$ une forme quadratique non nulle sur $\mathbf{C}^3$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) la conique $C = V(q)$ est réductible ; (b) le rang de $q$ est $\leq 2$ ; (c) le discriminant de $q$ est nul.
5. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques. Montrer que $\mathcal{F}$ contient au moins une conique réductible.
6. Montrer que soit toutes les coniques de $\mathcal{F}$ sont réductibles, soit $\mathcal{F}$ contient au plus 3 coniques réductibles.

**Exercice 4 – Courbe duale et théorème de Brianchon**

Soit $C \subset \mathbf{P} = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ une courbe projective lisse de degré $\geq 2$. On note $\mathbf{P}^*$ l'ensemble des droites projectives de $\mathbf{P}$.

1. Montrer que l'ensemble $C^*$ des tangentes de $C$ est une courbe de $\mathbf{P}^*$ ($C^*$ est appelée la *courbe duale* de $C$).
2. Montrer que si $C$ est une conique irréductible, alors $C$ est lisse et $C^*$ une conique de $\mathbf{P}^*$.
3. Montrer que si un hexagone a tous ses côtés tangents à une conique propre, alors ses diagonales sont concourantes (théorème de Brianchon).
4. Montrer qu'il existe une conique tangente à cinq droites données. Combien y a-t-il de solutions en général ?

**Exercice 5 – Théorème de Chasles**

Démontrer le théorème de Chasles : soient $C$ une cubique irréductible et $C'$ une autre cubique intersectant $C$ en exactement neuf points $P_1, \ldots, P_9$. Alors toute cubique qui passe par $P_1, \ldots, P_8$ passe aussi par $P_9$.

**Exercice 6**

Montrer qu'il existe une infinité de cubiques passant par les points $P_{i,j} = (i : j : 1)$ avec $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

**Exercice 7 – Loi de groupe sur une cubique**

Soit $C$ une cubique projective lisse. Étant donnés $P, Q \in C$, on note $D_{P,Q} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la droite passant par $P$ et $Q$ (resp. la tangente de $C$ en $P$ si $P = Q$).

1. Montrer qu'il existe un unique point $\varphi(P, Q) \in C$ tel que $D_{P,Q}$ intersecte $C$ en $P$, $Q$ et $\varphi(P, Q)$ (avec multiplicité).
2. On fixe $O \in C$. Montrer que la loi de composition $P \oplus Q := \varphi(\varphi(P, Q), O)$ est une loi de groupe abélien sur $C$, d'élément neutre $O$ (pour l'associativité, on pourra utiliser le théorème de Chasles).