Géométrie algébrique élémentaire – TD 11 (révisions)

On fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1 – Décomposition en irréductibles

Soit $F \in k[X,Y]$ un polynôme non constant et $F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ sa décomposition en irréductibles.

1. Quelle est la décomposition en irréductibles de la courbe $C = V(F)$?
2. Que vaut $I(C)$?

Exercice 2 – Folium de Descartes

On suppose ici $\mathrm{car}(k) \neq 3$.

1. Montrer que $F = X^3 + Y^3 + 3XY$ est irréductible dans $k[X,Y]$.
2. Déterminer les points singuliers de la courbe affine $C = V(F)$.
3. Déterminer les points à l'infini de C.
4. Montrer que ces points sont lisses et déterminer les tangentes de $\overline{C}$ en ces points.
5. Déterminer les droites D passant $P_0 = (0,0)$ telles que $m_{P_0}(\overline{C}, D) > 2$.

Exercice 3 – Lemniscate de Bernoulli

On suppose ici $\mathrm{car}(k) \neq 2$.

1. Montrer que $F = (X^2+Y^2)^2 - X^2 + Y^2$ est irréductible dans $k[X,Y]$.
2. Déterminer les points singuliers de la courbe affine $C = V(F)$.
3. Déterminer les points à l'infini de C. Sont-ils lisses ?
4. Déterminer les droites D passant $P_0 = (0,0)$ telles que $m_{P_0}(\overline{C}, D) > 2$.

Exercice 4

On considère la courbe affine $C : x^3 - xy^2 - y = 0$.

1. Montrer que C est irréductible et que $P_0 = (0,0)$ est lisse.
2. Montrer que x est une uniformisante de C en P_0.

3. Déterminer le développement limité de y en P_0 à la précision $O(x^4)$.
4. Déterminer l'ordre d'annulation de $y - x^3$ en P_0.
5. Quel est l'ordre d'annulation de la forme différentielle dx (resp. dy) en P_0 ?

Exercice 5

Soit $G \in k[X]$ un polynôme de degré $d \geq 3$. On suppose que G n'est pas un carré dans $k[X]$.

1. Montrer que $F(X, Y) = Y^2 - G(X)$ est irréductible dans $k[X, Y]$.
2. Montrer que $C = V(F)$ possède un unique point à l'infini P_∞.
3. À quelle condition sur G le point P_∞ est-il lisse ?

Exercice 6

Déterminer les tangentes à la courbe $C : y^2 = x(x^2 + 7x + 1)$ passant par le point $(0, 0)$.

Exercice 7

Déterminer les *asymptotes* des courbes suivantes, c'est-à-dire les droites affines qui sont tangentes à la courbe en un de ses points à l'infini :

(a) $C : x^3 - xy^2 - y = 0$
(b) $C : (y - x^2)^2 - xy^3 = 0$.

Exercice 8

On suppose ici $k = \mathbf{C}$. Soit $F \in \mathbf{R}[X, Y]$ un polynôme de degré 2, et $C = V(F) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Montrer que $C_\mathbf{R} := C \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est un cercle si et seulement si $C_\mathbf{R}$ est non vide et C contient les points $(1 : \pm i : 0)$.

Exercice 9

Vérifier le théorème de Bézout dans les cas suivants (on déterminera les points d'intersection et les multiplicités associées) :

1. $C : x^2 - y^2 + 2 = 0$, $D : x - y - 1 = 0$;
2. $C : x^2 - 2y^2 - 5 = 0$, $D : x - y - 1 = 0$;
3. $C : x^2 + y^2 = 1$, $C' : x^2 - y^2 = 1$;
4. $C : x^2 + y^2 = 1$, $C' : x^2 + y^2 = 2$;
5. $C : y^2 = x^3 - x$, D droite quelconque passant par $(0, 0)$;
6. $C : y^2 = x^3 - x^2$, D droite quelconque passant par $(0, 0)$.