Géométrie Algébrique
TD2

Dans toute cette feuille, le corps k est algébriquement clos. On emploiera indifféremment les mots "sous-ensemble algébrique" ou "sous-variété".

Exercice 1 : Montrer que les idéaux maximaux de $k[x_1, \ldots, x_n]$ sont les idéaux de la forme $M = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ avec $a_1, \ldots, a_n \in k$.

Exercice 2 : Montrer que tout idéal radical de $k[x_1 \ldots, x_n]$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Exercice 3 : Montrer que la toplogie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$ est quasi-compacte (tout recouvrement ouvert a un sous-recouvrement fini).

Exercice 4 : Montrer que le complémentaire d'un point dans $\mathbb{A}^n$ est un ouvert quasi-compact.

Exercice 5 : Soit $k = \mathbb{C}$. Montrer que $V(F)$ où $F = y - \mathrm{e}^x$ n'est pas un ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2$.

Exercice 6 : Soient $V \subseteq \mathbb{A}^n$ et $W \subseteq \mathbb{A}^m$ deux sous-variétés irréductibles. Montrer que $V \times W$ est une sous-variété irréductible de $\mathbb{A}^{m+n}$.

Exercice 7 : Soit $V \subseteq \mathbb{A}^n$ une sous-variété affine irréductible. Montrer que V est de dimension 0 si et seulement si V est réduite à un point. Que vaut $k[V]$ dans ce cas ?

Exercice 8 : Soit V une variété affine irréductible de dimension d. Montrer que qu'il existe des sous-variétés $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_d = V$ vérifiant $\dim V_i = i$ pour tout $0 \leq i \leq d$. Cette chaîne est-elle unique ?

Exercice 9 : Donner un exemple d'une sous-variété affine non irréductible dont les composantes irréductibles ne sont pas toutes de la même dimension.

Exercice 10 : Soit $P \in k[x_1 \ldots, x_n]$ un polynôme non constant irréductible. Montrer que la sous-variété $V(P) \subseteq \mathbb{A}^n$ est de dimension $n - 1$.

Exercice 11 : Soient $V_1 \subsetneq V_2$ deux variétés affines vérifiant $\dim V_1 < (\dim V_2) - 1$. Montrer qu'il existe une sous-variété V vérifiant $V_1 \subsetneq V \subsetneq V_2$.

Exercice 12 : Montrer que le pullback $F^* : k[V] \to k[W]$ est injectif si et seulement si F est dominant ($i.e$ $F(W)$ est dense dans V).

Exercice 13 :

a) Soit f une application polynomiale de $\mathbb{A}^n$ dans $\mathbb{A}^m$. Montrer que son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{A}^n\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^{n+m}$.

b) Trouver une application $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ dont le graphe est sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2$ mais qui n'est pas polynomiale.

c) Trouver une application polynomiale $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ et un sous-ensemble algébrique $V \subseteq \mathbb{A}^2$ tels que $f(V)$ ne soit pas un sous-enmble algébrique de $\mathbb{A}^1$.

d) Soit f une application polynomiale de $\mathbb{A}^1$ dans $\mathbb{A}^2$. Montrer que $f(\mathbb{A}^1)$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2$.

Exercice 14 : Soit A un anneau et X l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour tout sous-ensemble E de A on définit $V(E)$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent E. Montrer que

a) si $I = (E)$ alors $V(E) = V(I) = V(\sqrt{(}I))$

b) $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$

c) si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de A, alors

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$$

d) $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ pour I, J pour tout idéal I, J de A

Les $V(E)$ sont donc les fermés d'une topologie : la *topologie de Zariski* sur A. L'espace topologique X est appelé *le spectre* de A et noté $\mathrm{Spec}\,(A)$