Géométrie Algébrique
TD3

Exercice 1 :

a) Si $Y_1 \subseteq Y_2$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{P}^n$, alors $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

b) Si $T_1 \subseteq T_2$ sont des sous-ensembles d'éléments homogènes de $k[x_0, \ldots, x_n]$, alors $V(T_1) \supseteq V(T_2)$.

c) Pour tout $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{P}^n$, $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

d) Pour tout $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, $V(I(Y)) = \bar{Y}$.

Exercice 2 :

a) Montrer que $\mathbb{P}^n$ est un espace topologique noethérien.

b) Montrer que toute partie de $\mathbb{P}^n$ est noethérienne et quasi-compacte.

c) Montrer que tout ensemble algébrique dans $\mathbb{P}^n$ s'écrit de façon unique comme une union finie de composantes irréductibles.

Exercice 3 : Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^n$ induit la topolgie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$.

Exercice 4 :

a) Montrer que l'application $V \mapsto \bar{V}$ qui associe a un ensemble algébrique affine $V \subseteq \mathbb{A}^n$ son adhérence dans $\mathbb{P}^n$ est une bijection de l'ensemble des ensembles algébriques affines dans les ensembles algébriques projectifs dont aucune composante n'est contenue dans l'hyperplan à l'infini.

b) Montrer que V est irréductible si et seulement si $\bar{V}$ est irréductible.

c) Montrer que $\dim V = \dim \bar{V}$.

Exercice 5 : Montrer qu'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ est de dimension $n-1$ et réciproquement que tout fermé irréductible de $\mathbb{P}^n$ de dimension $n-1$ est une hypersurface.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ une application telle que son graphe est un fermé de $\mathbb{P}^{n+m}$. Montrer que l'image par f d'un fermé est fermé.

Exercice 7 : Montrer que dans $\mathbb{P}^n$ une hypersurface et une droite projectives s'intersectent toujours.

Exercice 8 : On note $\check{\mathbb{P}}^n$ l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}^n$. Montrer que $\check{\mathbb{P}}^n$ s'identifie naturellement à $\mathbb{P}^n$.

Exercice 9 : Soit $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ un ensemble algébrique non vide et $\theta : \mathbb{A}^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbb{P}^n$ l'application qui envoie le point $(a_0, \ldots, a_n)$ dans le point de coordonnées homogènes $(a_0, \ldots, a_n)$. On définit le cône afine sur Y par

$$C(Y) = \theta^{-1}(Y) \cup \{(0, \ldots, 0)\}.$$

a) Montrer que $C(Y)$ est un fermé de $\mathbb{A}^{n+1}$ d'idéal $I(Y)$ vu dans $k[x_0, \ldots, x_n]$.

b) Montrer que $\dim(C(Y)) = \dim(Y) + 1$.