Géométrie Algébrique
TD4

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ tel que $x \mapsto (x^3, x^2, x)$. On note C l'image de f est $\bar{C} \subseteq \mathbb{P}^3$ la courbe projective correspondante. On dit que $\bar{C}$ est une *cubique gauche*.

a) Trouver deux polynômes de degré 2, P_1 et P_2 dans $\mathbb{C}[x, y, z]$ tels que $C = V(P_1, P_2)$.

b) Expliciter $\bar{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ tel que $\bar{f}(\mathbb{P}^1) = \bar{C}$.

c) Écrire les polynômes homogènes $\bar{P}_1$ et $\bar{P}_2$ et montrer que $\bar{C} \neq V(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$.

d) Trouver un troisième polynôme quadratique P_3 tel que $\bar{C} = V(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3)$.

Exercice 2 : On suppose dans cet exercice car $(k) \neq 2, 3$. Soit $C \subseteq \mathbb{A}^2$ la *cubique de Fermat*, définie par l'équation affine $x^3 + y^3 = 1$.

a) Montrer que C est irréductible.

b) Montrer que $u = \frac{12}{x+y}$ et $v = \frac{36(y-x)}{x+y}$ sont des fonctions régulières sur C.

c) Déterminer une relation de dépendance algébrique entre u et v.

d) En déduire que l'application régulière $f = (u, v)$ de C dans $\mathbb{A}^2$ réalise un isomorphisme birationnel de C vers une courbe C' dont on précisera léquation.

e) L'application $f : C \to C'$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3 : Considérons la conique affine $C = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ (on suppose ici car $(k) \neq 2$).

a) Montrer que C est irréductible.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle $t = \frac{y}{x-1} \in k(C)$.

c) Montrer que $t : C \to \mathbb{A}^1$ est un isomorphisme birationnel (on cherchera l'application réciproque de t).

d) En déduire que $k(C)$ est égale au coprs $k(t)$.

e) On identifie $\mathbb{A}^2$ à un ouvert de $\mathbb{P}^2$ via $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$. Déterminer l'adhérence $\bar{C}$ de C dans $\mathbb{P}^2$ pour la topologie de Zariski.

f) Décrire $\bar{C}$ dans la carte $U_0 = \{(1 : y : z), y, z \in k\}$.

Exercice 4 : On prend $k = \mathbb{C}$ dans cet exercice. Considérons la variété affine $V \subseteq \mathbb{A}^2$ définie par l'équation

$$V : y^2 = x^3 + 17.$$

Soient $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ deux points de V avec $x_1 \neq x_2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine de $\mathbb{A}^2$ passant par P_1 et P_2.

a) Montrer que $\mathcal{D} \cap V = \{P_1, P_2, P_3\}$ et exprimer $P_3 = (x_3, y_3)$ en termes de P_1 et P_2.

b) Montrer que si P_1 et P_2 sont dans $\mathbb{Q}^2$ alors $P_3 \in \mathbb{Q}^2$.

c) Calculer P_3 lorsque $P_1 = (2, -5)$ et $P_2 = (4, 9)$.

d) Pouvez-vous adapter la construction précédente lorsque $P_1 = P_2$?

Exercice 5 : Montrer que le graphe d'une fonction polynômiale $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ est une courbe affine, et que cette courbe est isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

Exercice 6 : Soit $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de $\mathbb{A}^1$. Montrer que $\mathbb{A}^1 \backslash \{a_1, \dots, a_n\}$ est naturellement en bijection avec une courbe affine C et déterminer $k[C]$.

Exercice 7 : Montrer que si on a un isomorphisme de courbes affines $\phi : C \to C'$, alors pour tout point P de C, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{C,P}$ et $\mathcal{O}_{C',\phi(P)}$ sont isomorphes.

Exercice 8 : On considère la courbe affine $C = V(Y^2 - X^3)$.

a) Montrer que $k[C]$ n'est pas principal et en déduire que C n'est pas isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

b) On identifie $k(C)$ à $k(T)$. Montrer alors que $T \in \mathcal{O}_{C,P}$ si et seulement si $P \neq (0,0)$.

c) Montrer que pour $P = (0,0)$, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$ n'est pas principal. Montrer que pour un autre point P, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$ est principal.

Exercice 9 : On considère la courbe affine $C' = V(Y^2 - X^3 - X^2)$ et la paramétrisation $\phi : \mathbb{A}^1 \to C'$ donnée par

$$\phi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

a) Montrer que $\phi^* : k[C'] \to k[T]$ est injective et déterminer son image.

b) Montrer que ϕ est surjective, mais pas injective.

c) Montrer que $k[C']$ n'est pas principal et en déduire que C' n'est pas isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

d) C et C' sont-elles isomorphes ?