Géométrie algébrique élémentaire – TD 6

Exercice 1 – Un développement limité à l'infini

On fixe dans cet exercice $a, b \in k$. Soit $C_{a,b} \subset \mathbf{A}^2$ la courbe affine plane d'équation $C_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b$.

1. Montrer que $C_{a,b}$ est irréductible.
2. Montrer que l'unique point à l'infini de $C_{a,b}$ est $O = (0 : 1 : 0)$.
3. En utilisant une carte affine convenable, montrer que O est un point lisse de $\overline{C_{a,b}}$.
4. Calculer l'ordre d'annulation de x et y en O, et montrer que $t = x/y$ est une uniformisante en O.
5. Développer x et y en série de Laurent au point O, à la précision $O(t^3)$.
6. Montrer que si l'on continue le calcul, tous les coefficients obtenus sont des polynômes à coefficients entiers en a et b.

Exercice 2 – Un exemple de courbe non rationnelle

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$. Soit $C \subset \mathbf{A}^2$ la courbe affine plane d'équation $C : y^2 = x^3 + 1$.

1. Montrer que $\overline{C}$ est irréductible et lisse.

On suppose désormais, par l'absurde, que la courbe C est rationnelle, c'est-à-dire que $k(C) = k(f)$ avec $f \in k(C)$.

2. Montrer que l'ensemble $S \subset \overline{C}$ des pôles de f est fini et non vide.
3. Soit $P \in S$ tel que $\mathrm{ord}_P(f) \leq -2$. Montrer que pour tout $g \in k[f]$, l'ordre d'annulation de g en P est divisible par $\mathrm{ord}_P(f)$.
4. En déduire que tous les pôles de f sont simples.
5. On suppose que f possède deux pôles distincts P et Q. Montrer que ord_P et ord_Q coïncident sur $k[f]$.
6. En déduire que f possède un unique pôle.
7. Montrer qu'il existe $f_0 \in k(C)$ telle que $k(C) = k(f_0)$ et $\mathrm{ord}_O(f_0) = -1$ (on pourra considérer $1/(f - \lambda)$ avec $\lambda \in k$ bien choisi).
8. Montrer que $f_0 \in k[x, y]$, puis que $f_0 = f_1 + f_2 y$ avec $f_1, f_2 \in k[x]$.
9. Conclure en considérant l'ordre d'annulation en O.