Géométrie algébrique élémentaire – TD 7

Exercice 1

On se donne une courbe projective irréductible C, un point lisse P de C et une fonction rationnelle $f \in k(C)^*$. Montrer que si $\mathrm{ord}_P(f)$ n'est pas divisible par $\mathrm{car}(k)$, alors $\mathrm{ord}_P(df) = \mathrm{ord}_P(f) - 1$.

Exercice 2

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) = 0$. Soit C une courbe projective irréductible.

1. Montrer que si $f \in k(C)$ vérifie $df = 0$, alors f est constante.
2. Soit $f \in k(C)$ non constante. Montrer que la forme différentielle df/f n'admet pas de primitive dans $k(C)$.

Exercice 3 – $\mathbf{P}^1$ est de genre 0

On considère la courbe $C = \mathbf{P}^1(k)$. On pose $C = C_0 \cup \{\infty\}$ avec $C_0 = \{(x : 1); x \in k\} \cong \mathbf{A}^1(k)$ et $\infty = (1 : 0)$. On note $x \in k[C_0]$ la coordonnée naturelle sur C_0.

1. Montrer que $x \in k(C)$ a un pôle simple en ∞ et donner une uniformisante $u \in k(C)$ en ∞.
2. Déterminer les points de C où la forme différentielle $\omega_0 = dx \in \Omega^1(k(C))$ est régulière.
3. Soit $\omega \in \Omega^1(k(C))$ régulière sur C_0. Montrer qu'il existe $P \in k[X]$ tel que $\omega = P(x) \cdot dx$.
4. Montrer que si $P \neq 0$ alors $\mathrm{ord}_\infty(\omega) = -2 - \deg P$.
5. En déduire que $\mathbf{P}^1$ est de genre 0.

Exercice 4 – Une famille de courbes de genre 1

Pour $a, b \in k$, on note $E_{a,b} \subset \mathbf{P}^2$ la courbe projective associée à la courbe affine plane $C_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b$. On rappelle (cf. TD 6) que $C_{a,b}$ (et donc $E_{a,b}$) est irréductible et possède un unique point à l'infini $O = (0 : 1 : 0)$. On suppose dans tout cet exercice que $E_{a,b}$ est lisse.

1. Montrer que $\omega_0 = \frac{dx}{y}$ est régulière sur $E_{a,b}$.
2. Pour tout $P \in E_{a,b}$, montrer que $\mathrm{ord}_P(\omega_0) = 0$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que toute forme différentielle $\omega \in \Omega^1(E_{a,b})$ est de la forme $\lambda\omega_0$ avec $\lambda \in k$.
4. En déduire que $E_{a,b}$ est de genre 1.
5. (*) On suppose dans cette question $k = \mathbf{C}$. Dessiner $C_{-1,0} \cap \mathbf{R}^2$ et montrer que $E_{-1,0}$ muni de la topologie usuelle est homéomorphe au tore $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$.

Exercice 5 – Courbes de Fermat

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) = 0$. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la courbe affine plane d'équation $C_n : x^n + y^n = 1$.

1. Montrer que C_n est irréductible.
2. Trouver une relation entre les formes différentielles dx et dy sur C_n.
3. Pour $i, j \in \mathbf{Z}$, posons $\omega_{i,j} = x^i y^j dx \in \Omega^1(k(C_n))$. Montrer que si $i \geq 0$, $j \geq 1-n$ et $i+j \leq -2$ alors $\omega_{i,j}$ est régulière sur $\overline{C_n}$.
4. Montrer que $(\omega_{i,j})_{i\geq 0, j\geq 1-n \text{ et } i+j\leq -2}$ est une base du k-espace vectoriel $\Omega^1(\overline{C_n})$ et en déduire le genre de $\overline{C_n}$.

Exercice 6 – Finitude du genre

Soit C une courbe projective irréductible et lisse. Le but de cet exercice est de montrer que le genre de C est bien défini, autrement dit que le k-espace vectoriel $\Omega^1(C)$ est de dimension finie.

Supposons qu'il existe $\omega_0 \in \Omega^1(C)$ non nulle. Pour $P \in C$, posons $n_P = \mathrm{ord}_P(\omega_0) \geq 0$ et choisissons une uniformisante $t_P \in k(C)$ en P. Enfin, considérons l'application k-linéaire $\phi_P : \Omega^1(C) \to k[[T]]/(T^{n_P})$ qui à ω associe la classe du développement de Taylor en t_P de la fonction ω/dt_P.

1. Montrer $\bigcap_{P\in C} \ker\phi_P = k\omega_0$.
2. Montrer que $S = \{P \in C ; n_P \geq 1\}$ est fini.
3. En déduire que $\Omega^1(C)$ est de dimension finie.
4. Généraliser au cas où C n'est plus supposée lisse (on pourra considérer les applications $\Omega^1(C) \to \Omega^1_{C,P}/\mathcal{O}_{C,P}\omega_0$).