ÉNS Lyon M1 2009-2010

Géométrie algébrique élémentaire – TD 8

Exercice 1

Déterminer les points d'intersection de $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ pour les courbes suivantes :

(a) $C_1 : y = x$ et $C_2 : y = x^2$

(b) $C_1 : x + y = 2$ et $C_2 : x^2 + y^2 = 2$

(c) $C_1 : x + y = 1$ et $C_2 : x^3 + y^3 = 1$

(d) $C_1 : x^2 + y^2 = 2$ et $C_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 2$.

(e) $C_1 : y = x^2$ et $C_2 : y = x^3$

(f) $C_1 : y^2 = 2x$ et $C_2 : y^2 = x^3 - 2x$

Exercice 2

On reprend l'exercice 1.

1. Dans chacun des cas, dessiner $C_1 \cap \mathbf{R}^2$ et $C_2 \cap \mathbf{R}^2$.
2. Pour chaque point $P \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$, calculer la multiplicité d'intersection $m_P(\overline{C_1}, \overline{C_2})$.
3. En déduire le théorème de Bézout pour les intersections considérées.

Exercice 3

Pour chacune des courbes C ci-dessous, calculer la multiplicité d'intersection en $P = (0, 0)$ de C avec une droite D passant par P (on distinguera suivant D) :

(a) $C : xy = 2x^2 - y^2$

(b) $C : y^2 = x^3$

(c) $C : xy = y^4 - x^3$

Exercice 4

Soit $F \in k[X, Y]$ un polynôme sans facteur carré, de degré $d \geq 1$. On suppose que la courbe affine plane $C = V(F)$ passe par $P = (0, 0)$.

1. On note $\mu \geq 1$ le plus petit degré d'un monôme de F. Montrer que pour toute droite D passant par P, on a $m_P(C, D) \geq \mu$.
2. On dit que D est une *tangente* de C en P si $m_P(C, D) > \mu$. Montrer que cette définition généralise la notion usuelle de tangente lorsque P est un point lisse de C.
3. Montrer que C ne possède qu'un nombre fini de tangentes en P.
4. Donner un exemple de courbe possédant plusieurs tangentes en un point.
5. On suppose dans cette question $\mathrm{car}(k) = 0$. Montrer qu'à l'exception d'un nombre fini de droites, une droite D passant par P intersecte C en exactement $d - \mu$ points distincts de P.

Exercice 5

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) = p > 0$, et on considère la courbe affine plane $C : y = x^{p+1}$.

1. Montrer que C est lisse et que toutes ses tangentes passent par le point $P = (0, 0)$.
2. Vérifier le théorème de Bézout pour l'intersection de C avec chacune de ses tangentes.

Exercice 6

Soit C_1, C_2 deux courbes affines passant par $P = (0, 0)$ et singulières en ce point. On note μ_1, μ_2 les entiers (≥ 2) définis dans l'exercice 4, associés respectivement à C_1 et à C_2. Montrer que $m_P(C_1, C_2) \geq \mu_1\mu_2$.