Géométrie algébrique élémentaire – TD 9

Exercice 1

On suppose dans cet exercice $k = \mathbf{C}$.

Soit E la courbe affine plane d'équation $E : y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \mathbf{C})$. On note $\overline{E}$ la courbe projective associée à E.

1. Montrer que la droite à l'infini D_∞ coupe $\overline{E}$ en unique point O.
2. En déduire que $m_O(\overline{E}, D_\infty) = 3$ (*i. e.* O est un point d'inflexion de $\overline{E}$).

Soit maintenant $C \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la cubique $X_0^3 + X_1^3 + dX_2^3 = 0$ $(d \in \mathbf{C}^*)$.

3. Déterminer la tangente T de C au point $O = (1 : -1 : 0)$.
4. En considérant $C \cap T$, montrer que O est un point d'inflexion de C.
5. En utilisant une homographie convenable de $\mathbf{P}^2$ envoyant T sur D_∞, montrer que C est isomorphe à $\overline{E}$ avec $E : y^2 = x^3 - 432d^2$.

Exercice 2 – Quelques conséquences du théorème de Bézout

Soit C_1, C_2 deux courbes projectives planes. On note d_i le degré de C_i, c'est-à-dire le degré d'un générateur de $I(C_i)$.

1. Montrer que si $\#(C_1 \cap C_2) > d_1 d_2$, alors C_1 et C_2 ont une composante irréductible commune (et donc $C_1 \cap C_2$ est infini).
2. Montrer que si $\#(C_1 \cap C_2) = d_1 d_2$, alors C_1 et C_2 s'intersectent transversalement.

Soit C une courbe projective plane.

3. Montrer que si C est lisse, alors C est irréductible (on pourra raisonner par l'absurde et considérer un point dans l'intersection de deux composantes de C). Est-ce vrai pour une courbe affine plane ?
4. On suppose C irréductible de degré d. Montrer que C a au plus $\frac{d(d-1)}{2}$ points singuliers (on pourra considérer l'intersection de $C = V(F)$ avec $V(\partial F/\partial X_i)$ pour une dérivée partielle bien choisie). *Remarque* : on peut améliorer cette borne, la meilleure possible étant $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Exercice 3

Soit $(P_i)_{1\leq i\leq 5}$ cinq points distincts de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

1. Montrer qu'il existe une conique $C \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (*i. e.* $C = V(F)$ avec $F \in \mathbf{C}[X,Y,Z]$ homogène de degré 2) passant par ces cinq points.
2. Montrer que C est unique si et seulement si aucune droite ne passe par quatre de ces points.
3. Montrer que C est irréductible si et seulement si aucune droite ne passe par trois de ces points.
4. Déterminer C lorsque $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (1,1)$ et $P_5 = (3,2)$.
5. Plus généralement, étant donné $d \geq 2$, déterminer le plus grand entier $N_d \geq 1$ tel que N_d points distincts de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sont toujours contenus dans une courbe $C = V(F)$ avec $F \in \mathbf{C}[X,Y,Z]$ homogène de degré d.

Exercice 4

On suppose dans cet exercice $k = \mathbf{C}$. Soit $C \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la cubique

$$C : aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0 \qquad (a,b,c \in \mathbf{C}^*).$$

1. Montrer que C est lisse.
2. Soit $P = (x:y:z) \in C$. Déterminer la tangente T de C en P.
3. Montrer qu'il existe un unique point $P' \in \mathbf{P}^2$ tel que $C \cap T = \{P, P'\}$.
4. Montrer que ce point est donné par $P' = (x':y':z')$ avec

$$\begin{aligned} x' &= x(by^3 - cz^3) \\ y' &= y(cz^3 - ax^3) \\ z' &= z(ax^3 - by^3) \end{aligned}$$

On suppose maintenant que a,b,c sont trois entiers sans facteur carré vérifiant $a > b > c > 0$.

5. Montrer que tout point de $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ s'écrit $(x:y:z)$ avec $x,y,z \in \mathbf{Z}$ et $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$.
6. On suppose $P \in C \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$. Montrer que $P' = (x':y':z')$ avec $x',y',z' \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{pgcd}(x',y',z') = 1$ et $|x'y'z'| > |xyz|$.
7. En déduire que $C \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ est vide ou infini.