ÉNS Lyon | Rappels d'algèbre
Préparation à l'agrégation | 2010-2011

Résultant, discriminant, fractions rationnelles

Exercice 1

Calculer le résultant par rapport à la variable X des polyômes $XY - 1$ et XY.

Exercice 2

Soit A un anneau factoriel et $P, Q \in A[X]$. Montrer que $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont un facteur commun de degré ≥ 1 dans $A[X]$.

Exercice 3 Intersections de coniques

Déterminer l'intersection de C et C' dans les cas suivants :

(a) $C : x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ et $C' : 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0$;

(b) $C : 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 0$ et $C' : 3x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.

Exercice 4 Équations implicites de courbes paramétrées

Déterminer une équation des courbes paramétrées $(x(t), y(t)) = (F(t), G(t))$ $(t \in \mathbf{R})$ suivantes :

(a) $F(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $G(t) = 2t/(t^2 + 1)$;

(b) $F(t) = t^2 - 1$, $G(t) = t^3 + t^2$;

(c) $F(t) = t^2 + t + 1$, $G(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$;

Exercice 5 Sommes de nombres algébriques

Soit α, β deux nombres algébriques, de polynômes minimaux respectifs P et Q sur $\mathbf{Q}$. On pose $R(X) = \mathrm{Res}_Y(P(Y), Q(X - Y)) \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que R est un polynôme annulateur de $\alpha + \beta$.
2. Montrer que $R = \prod_{\alpha', \beta'} X - (\alpha' + \beta')$ où α' (resp. β') parcourt les racines de P (resp. Q).
3. R est-il toujours le polynôme minimal de $\alpha + \beta$?
4. Trouver de manière analogue un polynôme annulateur de $\alpha\beta$.
5. *Application :* trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et donner toutes ses racines.

Exercice 6 Transformations de Tschirnhaus

Soit α un nombre algébrique, de polynôme minimal P sur $\mathbf{Q}$. Soit $Q \in \mathbf{Q}[X]$ non constant. On pose $R(X) = \mathrm{Res}_Y(P(Y), X - Q(Y)) \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que R est un polynôme annulateur de $Q(\alpha)$.
2. Montrer que $R = \prod_{\alpha'} X - Q(\alpha')$ où α' parcourt les racines de P.
3. R est-il toujours le polynôme minimal de $Q(\alpha)$?
4. *Application* : Exprimer la racine réelle de l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ en termes de radicaux (on pourra poser $y = x^2 + \lambda x$ avec λ bien choisi).

Exercice 7

Soient K un corps, p et q des entiers, $P = a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_qX^q + \cdots + b_1X + b_0$ des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur respectivement à p et q. On note $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k Y^{p-k}$ et $\widetilde{Q} = \sum_{l=0}^{q} b_l X^l Y^{q-l}$ les polynômes homogènes de $K[X, Y]$ respectivement associés à P et à Q. Montrer que $\mathrm{Res}_{p,q}(P, Q) = 0$ si et seulement si $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ ont un zéro commun dans $K^2 - \{0\}$.

Exercice 8

Soit K un corps, P un polynôme unitaire à coefficients dans K et Q un polynôme à coefficients dans K. Montrer que le resultant de P et Q est égal au déterminant de l'application K-linéaire de la K-algèbre de dimension finie $K[X]/(P)$ donnée par la multiplication par Q.

Exercice 9 Intersections de quadriques

Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, et $C \subset \mathbf{R}^3$ le cylindre d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. On pose $X = C \cap S$.

1. À l'aide de résultants, déterminer les projections orthogonales de X sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
2. Décrire de même $Y = C \cap C'$ avec $C' : x^2 + z^2 = 1$.

Exercice 10

Calculer $\mathrm{disc}(X^2 + bX + c)$ et $\mathrm{disc}(X^3 + pX + q)$.

Exercice 11

Soient d un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme à coefficients réels, unitaire et de degré d. On note n le nombre de racines réelles de P.

1. Montrer que $\mathrm{disc}(P) > 0$ entraîne $n \equiv d \pmod 4$, et que $\mathrm{disc}(P) < 0$ entraîne $n \equiv d - 2 \pmod 4$.

2. Comment se traduisent ces résultats pour le polynôme $X^3 + pX + q$?

Exercice 12

Montrer que $\mathrm{disc}_p : K[X]_{\leq p} \to K$ est invariante sous $\mathrm{SL}_2(K)$.

Exercice 13

Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes unitaires de degrés respectifs p et q. Exprimer $\mathrm{disc}(PQ)$ en fonction de $\mathrm{disc}(P)$, $\mathrm{disc}(Q)$ et $\mathrm{Res}_{p,q}(P, Q)$.

Exercice 14

Calculer le discriminant du polynôme cyclotomique $\Phi_{p^\alpha}(X)$, où p est un nombre premier (on pourra commencer par traiter le cas $\alpha = 1$).

Exercice 15 Un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soit U l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui sont diagonalisables à valeurs propres simples.

1. En utilisant le discriminant, montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. Montrer que U est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 16 Automorphismes des fractions rationnelles

Soit K un corps. Pour tout $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$ avec $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux, on définit la *hauteur* de F par $h(F) = \max(\deg P, \deg Q)$.

1. Montrer que $h(F) = 0$ si et seulement si $F \in K$.
2. Montrer que $h(F) = 1$ si et seulement si $F = \frac{aX+b}{cX+d}$ avec $a, b, c, d \in K$ et $ad - bc \neq 0$.
3. Soit σ un K-automorphisme de $K(X)$ (*i. e.* un automorphisme du corps $K(X)$, tel que $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$). Montrer que σ est de la forme
$$\sigma(F(X)) = F\Big(\frac{aX+b}{cX+d}\Big) \qquad (F \in K(X))$$
avec $ad - bc \neq 0$.
4. En déduire que le groupe des K-automorphismes de $K(X)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(K)$.

Exercice 17

Soit K un corps. Montrer que l'équation $F' = \frac{1}{X}$ n'a pas de solution dans $K(X)$. Qu'en est-il de l'équation $F' = F$?

Exercice 18

Soit K un corps. Montrer que l'application $\psi : F \mapsto \frac{F'}{F}$ est un morphisme du groupe multiplicatif $K(X)^*$ vers le groupe additif $K(X)$. Quel est son noyau ? (on distinguera suivant $\mathrm{car}(K)$)

Exercice 19 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{X^5+1}{X(X^2-1)^2} \text{ dans } \mathbf{Q}(X);\ \frac{1}{X^8+X^4+1} \text{ dans } \mathbf{R}(X) \text{ et } \mathbf{C}(X);$$
$$\frac{1}{X^n-1} \text{ dans } \mathbf{C}(X);\ \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} \text{ dans } \mathbf{Q}(X).$$

Exercice 20 En utilisant la dérivée logarithmique, décomposer la fraction rationnelle $F = X^{n-1}/(X^n-1)$ en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$.

Exercice 21 Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. On note $F = E + \sum_{\lambda\in\mathbf{C}}\sum_{n\geq 1}\frac{a_{\lambda,n}}{(X-\lambda)^n}$ sa décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}$.

1. Que peut-on dire de E et des $a_{\lambda,n}$?
2. On suppose connus E et les $a_{\lambda,n}$. Est-il facile d'en déduire la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbf{R}$?

Exercice 22

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{C}(X)$ de degré ≤ -2 (*i. e.* $\deg P - \deg Q \leq -2$). Montrer que la somme des résidus de F est nulle.

Exercice 23

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul et $F = P'/P$.

(a) Exprimer P''/P en termes de F et F'.

(b) On suppose que P possède au moins deux racines et que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

(c) On suppose que $P \in \mathbf{R}[X]$ possède au moins deux racines réelles et que P'' divise P. Montrer que P est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

Exercice 24 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. En décomposant P'/P en éléments simples, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.