Géométrie algébrique élémentaire – TD 1

Exercice 1
Soit k un corps et n un entier ≥ 1.

1. Montrer que $\mathrm{Hom}_k(k[X_1, \ldots, X_n], k)$ est en bijection avec k^n (où Hom_k désigne l'ensemble des morphismes de k-algèbres).
2. Soit A une partie de k^n. On note $k[A]$ l'ensemble des fonctions de A dans k qui sont restriction d'une fonction polynomiale sur k^n. Définir une application naturelle $A \to \mathrm{Hom}_k(k[A], k)$.
3. Cette application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 – La topologie de Zariski
Soit k un corps algébriquement clos et n un entier ≥ 1. Si S est une partie de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on pose $V(S) = \{x \in k^n : \forall P \in S, P(x) = 0\}$.

1. Montrer que $V(S) = V(I)$, où I est l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par S.
2. Montrer que $\mathcal{F} := \{V(I) : I \text{ idéal de } k[X_1, \ldots, X_n]\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur k^n (appelée *topologie de Zariski*).
3. Montrer que k^n est un espace topologique *noethérien* : toute suite décroissante de fermés de k^n est stationnaire.
4. Que dire d'une réunion dénombrable croissante de fermés de k^n ?
5. Montrer que k^n est un espace topologique *irréductible* : il ne peut s'écrire comme réunion de deux fermés stricts.
6. En déduire que tout ouvert non vide de k^n est dense pour la topologie de Zariski.

Exercice 3
Montrer que $\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : y = e^x\}$ est dense dans $\mathbf{C}^2$ pour la topologie de Zariski.

Exercice 4 – Anneaux noethériens
Si k est un corps, montrer que toute k-algèbre de type fini est noethérienne. Que dire de la réciproque ?

Exercice 5 – Noethérianité des anneaux d'invariants

1. Soit $A \subset B$ des anneaux et $\varphi : B \to A$ un morphisme de A-modules tel que $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$. Montrer que si B est noethérien, alors A l'est aussi.
2. Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ la sous-k-algèbre de $k[X_1, \ldots, X_n]$ formée des polynômes G-invariants. Déduire de la question précédente que si k est de caractéristique 0, alors $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est noethérienne.

Remarque : un théorème célèbre de David Hilbert en 1890 entraîne que si $\mathrm{Card}(G)$ n'est pas divisible par $\mathrm{car}(k)$, alors $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est une k-algèbre de type fini.

Exercice 6 – Nullstellensatz

Soit k un corps algébriquement clos et K une extension de k. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de $k[X_1,\ldots,X_n]$. On suppose que les f_i ont un zéro commun dans K^n. En utilisant le Nullstellensatz, montrer que les f_i ont un zéro commun dans k^n. Le résultat subsiste-t-il si k n'est pas algébriquement clos ?

Exercice 7 – Normalisation de Noether

Soit k un corps algébriquement clos. Pour chaque k-algèbre A ci-dessous, trouver $x_1,\ldots,x_n \in A$ algébriquement indépendants sur k tels que A est entière sur $k[x_1,\ldots,x_n]$ (théorème de normalisation d'Emmy Noether).

$$A = k[X, \frac{1}{X}] \qquad\qquad A = k[X^2, X^3]$$
$$A = k[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \qquad\qquad A = k[X,Y,Z]/(XYZ-1).$$

Exercice 8 – Algèbres d'invariants

Soit k un corps algébriquement clos et $n \geq 1$. Soit $\psi : k^n \to \mathrm{Hom}_k(k[X_1,\ldots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}, k)$ l'application naturelle donnée par l'évaluation des polynômes.

1. Montrer que $\psi(x) = \psi(x') \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : x' = \sigma(x)$.
2. Montrer que ψ est surjective et en déduire une bijection
$$\overline{\psi} : k^n/\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(k[X_1,\ldots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}, k).$$
3. Montrer que $\overline{\psi}$ permet de définir une topologie de Zariski sur $k^n/\mathfrak{S}_n$, puis que cette topologie est le quotient de la topologie de Zariski sur k^n.
4. *(Plus difficile)* Montrer que ces résultats restent valables si l'on remplace $\mathfrak{S}_n$ par un sous-groupe fini G de $\mathfrak{S}_n$ (pour le 1er point, on pourra considérer le polynôme $\prod_{\sigma\in G} T - P^\sigma$, où $P \in k[X_1,\ldots,X_n]$, et pour le 2e point, on pourra considérer $\prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} T - P^\sigma$, où $P \in k[X_1,\ldots,X_n]^G$).

Remarque : cet exercice permet de donner un sens un peu plus précis à l'affirmation suivante : « $k[X_1,\ldots,X_n]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur k^n/G ».