Géométrie algébrique élémentaire – TD 2

Dans toute la feuille, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1

1. Soient $m, n \geq 1$ des entiers. Montrer que si F est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^m$ et G est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^n$, alors $F \times G$ est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^{m+n}$.
2. Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ n'est pas le produit des topologies de Zariski sur chacun des facteurs.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et F un fermé algébrique de $\mathbf{A}^n$. Montrer que $I(F)$ est premier si et seulement si F n'est pas la réunion de deux fermés algébriques contenus strictement dans F.

Exercice 3

Considérons les idéaux $J = (XY, XZ, YZ)$ et $J' = (XY, (X-Y)Z)$ dans $k[X, Y, Z]$.

1. Déterminer $V(J)$ et $V(J')$.
2. A-t-on $J = I(V(J))$? $J' = I(V(J'))$? Déterminer $\sqrt{J}$ et $\sqrt{J'}$.
3. Montrer que J ne peut pas être engendré par 2 éléments.

Exercice 4

1. Montrer que $C = \{(t, t^2, t^3) : t \in k\}$ est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^3$.
2. Déterminer $I(C)$.

Exercice 5

Soit $C \subset \mathbf{A}^2$ une courbe affine plane irréductible. Montrer que si C' est une courbe affine plane contenue dans C, alors $C' = C$.

Exercice 6

Pour $\lambda \in k$, on note J_λ l'idéal de $k[X, Y]$ défini par $J_\lambda = (X^2 + Y^2 - 1, X - \lambda)$.

1. Quelle est l'interprétation géométrique de $V(J_\lambda)$?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $I(V(J_\lambda)) = J_\lambda$.

Exercice 7

1. Montrer que $C = \{(t^2, t^3) : t \in k\}$ est une courbe affine plane et déterminer $I(C)$.
2. Généraliser à $C = \{(t^a, t^b) : t \in k\}$, où $a, b \geq 1$ sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 8

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit C une courbe affine plane symétrique par rapport au point $(0,0)$. Montrer qu'il existe des polynômes $P, Q \in k[X,Y]$ tels que $C = V(P(X^2,Y^2) + Q(X^2,Y^2)XY)$.

Exercice 9

Pour $a \in k$, on considère la courbe affine plane $C_a = V(Y^2 - X^3 - aX - 1)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a, a' \in k$ pour que C_a et $C_{a'}$ soient affinement équivalentes dans $\mathbf{A}^2$ (*i. e.* il existe $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ tel que $C_{a'}$ soit une translatée de $g(C_a)$).

Exercice 10 – Un peu de topologie générale

Soit X un espace topologique noethérien (toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire). On dit que X est *irréductible* si X n'est pas la réunion de deux fermés distincts de X. Une partie de X est dite irréductible si elle l'est pour la topologie induite. Le but de cet exercice est de montrer que X possède une unique décomposition en composantes irréductibles.

1. Montrer que toute famille non vide de fermés de X admet un élément minimal.
2. Montrer que tout fermé de X est réunion finie de fermés irréductibles (on pourra considérer l'ensemble des fermés qui ne le sont pas).
3. Montrer que si une partie irréductible A de X est contenue dans une réunion finie de fermés de X, alors A est contenue dans l'un d'eux.
4. Montrer que $X = \cup_{i=1}^n Z_i$ avec Z_i fermé irréductible de X et $Z_i \not\subset \cup_{j\neq i} Z_j$ pour tout i.
5. Montrer que pour toute telle décomposition, les Z_i sont exactement les parties irréductibles de X maximales pour l'inclusion (on les appelle les *composantes irréductibles* de X).
6. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme non constant. Quelle est la décomposition de l'hypersurface $V(P) \subset \mathbf{A}^n$ en composantes irréductibles ?