Géométrie algébrique élémentaire – TD 3

Dans toute la feuille, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1

En utilisant le résultat de finitude vu en cours sur l'intersection de courbes planes, montrer que tout fermé algébrique de $\mathbf{A}^2$ est soit un ensemble fini, soit la réunion d'une courbe et d'un ensemble fini, soit $\mathbf{A}^2$ tout entier.

Exercice 2

Soit F un fermé algébrique de $\mathbf{A}^2$.

1. Montrer que le k-espace vectoriel $k[F]$ est de dimension finie si et seulement si F est fini.
2. Montrer que dans ce cas on a $\dim_k k[F] = \operatorname{card} F$ (on pourra faire un changement linéaire convenable de coordonnées).

Exercice 3

Soit C une courbe affine plane et f une fonction régulière sur C. Montrer que f est inversible dans $k[C]$ si et seulement si f ne s'annule pas sur C.

Exercice 4

On considère la courbe affine plane $C = V(XY - 1)$.

1. Montrer que $k[C] \cong k\left[X, \frac{1}{X}\right]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction régulière inversible non constante sur C.
3. En déduire que C n'est pas isomorphe à $\mathbf{A}^1$.

Exercice 5

On considère la courbe affine plane $C = V(Y^2 - X^3)$ et l'application régulière $f : \mathbf{A}^1 \to C$ définie par $f(t) = (t^2, t^3)$.

1. Montrer que $f^* : k[C] \to k[\mathbf{A}^1]$ est injective.
2. En déduire un isomorphisme $k[C] \cong k[T^2, T^3]$.
3. Montrer que la fonction rationnelle $t := y/x$ n'est pas régulière en $(0, 0)$.
4. Établir que $k[T^2, T^3]$ n'est pas principal et en déduire que C n'est pas isomorphe à $\mathbf{A}^1$.

Exercice 6

Considérons un polynôme $Q \in k[X]$ et posons $P = Y - Q(X) \in k[X, Y]$.

1. Montrer que la courbe affine plane $C = V(P)$ est irréductible.
2. Montrer l'application $p : C \to \mathbf{A}^1$ définie par $p(x, y) = x$ est un isomorphisme.
3. Réciproquement, montrer que si C est une courbe affine plane telle que $p : C \to \mathbf{A}^1$ est un isomorphisme, alors il existe $Q \in k[X]$ tel que $C = V(Y - Q(X))$.

Exercice 7

Soit $C = V(X^2 + Y^2 - 1)$. On suppose $\mathrm{car}(k) \neq 2$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle $t = (y-1)/x \in k(C)$.
3. Montrer que $k(C) = k(t)$ (on pourra exprimer x et y en fonction de t).
4. Que dire de C et $k(C)$ si $\mathrm{car}(k) = 2$?

Exercice 8

Considérons la cubique de Fermat $C = V(X^3 + Y^3 - 1)$. On suppose $\mathrm{car}(k) \notin \{2, 3\}$.

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que les fonctions rationnelles $t = \frac{12}{x+y}$ et $u = 36 \cdot \frac{y-x}{x+y}$ sont régulières sur C.
3. Montrer que $k(C) = k(t, u)$ et trouver une relation algébrique vérifiée par t et u.
4. Montrer que l'application $f = (t, u) : C \to \mathbf{A}^2$ est injective et trouver une courbe affine plane irréductible C' telle que $f(C) \subset C'$.
5. L'application f définit-elle un isomorphisme de C vers C' ?

Exercice 9

Soient $V \subset \mathbf{A}^m$ et $W \subset \mathbf{A}^n$ des fermés algébriques. On munit V (resp. W) de la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^m$ (resp. $\mathbf{A}^n$). Montrer que toute application régulière $f : V \to W$ est continue. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10

Soient $V \subset \mathbf{A}^m$ et $W \subset \mathbf{A}^n$ des fermés algébriques. Montrer que la k-algèbre $k[V \times W]$ est isomorphe à $k[V] \otimes_k k[W]$.