Géométrie algébrique élémentaire – TD 5

Dans toute la feuille, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1
Déterminer les points singuliers des courbes affines planes suivantes ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) :

(a) $C : x^2 = x^4 + y^4$
(b) $C : xy = x^6 + y^6$
(c) $C : x^3 = y^2 + x^4 + y^4$
(d) $C : x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$

Pour chacune de ces courbes, déterminer la multiplicité du point $(0,0)$ ainsi que la ou les tangentes en ce point.

Exercice 2
Soit $F \in k[X,Y]$ un polynôme non constant et $C = V(F)$. Montrer que si $P \in C$ vérifie $(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})(P) \neq (0,0)$, alors P est lisse et T_PC est donnée par l'équation habituelle (attention, on ne suppose pas $I(C) = (F)$).

Exercice 3
Soit C une courbe affine plane et P un point lisse de C. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in k$ et D la droite affine définie par $D = V(\alpha X + \beta Y + \gamma)$. Montrer que D est la tangente de C en P si et seulement si $\alpha x + \beta y + \gamma \in \mathfrak{m}^2$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $k[C]$ associé à P.

Exercice 4
Soit C une courbe affine plane. Montrer que l'ensemble des points singuliers de C est fini (on pourra commencer par le cas où C est irréductible).

Exercice 5
Soient $P, Q \in k[T]$ des polynômes, avec P ou Q non constant. Soit C la courbe affine plane irréductible définie par $C = \gamma(\mathbf{A}^1)$, avec $\gamma(t) = (P(t), Q(t))$. Soit $M \in C$.

1. On suppose que $M = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ avec $t_1, t_2 \in k$ distincts. Montrer que si les vecteurs $\gamma'(t_1)$ et $\gamma'(t_2)$ sont linéairement indépendants sur k, alors M est un point singulier de C.
2. On suppose qu'il existe un unique $t \in k$ tel que $M = \gamma(t)$. Montrer que si $\gamma'(t) \neq (0,0)$, alors M est un point lisse de C.

Exercice 6
On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $P \in k[X]$ non constant.

1. À quelle condition sur P la courbe affine plane $C = V(Y^2 - P(X))$ est-elle lisse ?
2. On prend $P = X^4 + 1$. Trouver les droites passant par $(0,0)$ et tangentes à C.
3. On prend $P = X^4 + 1$. Déterminer les bitangentes de C (droites tangentes en deux points distints de C).
4. Pour un polynôme P de degré 4 « général », combien y a-t-il de droites passant par $(0,0)$ et tangentes à C ? combien C admet-elle de bitangentes ?

Exercice 7

On considère la courbe $C : y^2 = x^3 - x$ (on suppose $\mathrm{car}(k) \neq 2$).

1. Montrer que C est irréductible.
2. Montrer que C est lisse.
3. Montrer que tout $f \in k[C]$ s'écrit de manière unique $f = P(x) + Q(x)y$ avec $P, Q \in k[X]$.
4. Soit σ l'involution de C définie par $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Montrer que σ est une application régulière et que σ^* est un automorphisme de la k-algèbre $k[C]$. Que peut-on dire d'un élément de $k[C]$ fixé par σ^* ?
5. Montrer que $k[C]^\times = k^\times$ (on pourra considérer l'application $N : k[C] \to k[x]$ définie par $N(f) = f \cdot \sigma^*(f)$).
6. Montrer que x et y sont irréductibles et non associés dans $k[C]$ (on pourra remarquer que si $f|g$ dans $k[C]$ alors $N(f)|N(g)$ dans $k[x]$).
7. En déduire que l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (x, y)$ de $k[C]$ n'est pas principal.
8. Montrer que $k[C]$ n'est pas factoriel.