Géométrie algébrique élémentaire – TD 6

Exercice 1

Soit K un corps.

1. Montrer que $K[[T]]$ est un anneau de valuation discrète.
2. Décrire le corps résiduel et les idéaux de $K[[T]]$.
3. On suppose $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que le sous-anneau de $K[[T]]$ formé des séries entières ayant un rayon de convergence > 0 est un anneau de valuation discrète.

Exercice 2

Soit A un anneau factoriel et $\pi \in A$ un irréductible. Soit $K = \mathrm{Frac}(A)$.

1. Construire une valuation discrète v_π sur K telle que $v_\pi(\pi) = 1$.
2. Montrer que l'anneau de valuation associé à (K, v_π) est le localisé $A_{(\pi)}$.
3. En déduire le critère suivant : un anneau B est un anneau de valuation discrète si et seulement si B est principal, local et n'est pas un corps.

Exercice 3

Montrer que toute valuation discrète sur $\mathbf{Q}$ est la valuation p-adique associée à un nombre premier p convenable.

Pour les exercices suivants, on fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 4

On considère la courbe affine plane $C = V(Y^2 + Y - X^3 - X)$ et le point $P = (0, 0) \in C$.

1. Montrer que P est lisse et déterminer la tangente de C en P.
2. Montrer que x et y sont des uniformisantes de C en P.
3. Déterminer le développement limité de x en P à l'ordre 5 par rapport à y, puis celui de y en P à l'ordre 5 par rapport à x.
4. Montrer que ces développements limités sont à coefficients entiers. Pouvez-vous montrer que ces développements sont infinis (en toute caractéristique) ?

Exercice 5

On considère la courbe $C = V(Y^2 - X^3 + 1)$ et le point $P = (1, 0)$.

1. Montrer P est lisse si et seulement si $\mathrm{car}(k) \neq 3$, et donner dans ce cas la tangente de C en P.
2. On suppose $\mathrm{car}(k) \neq 3$. Montrer que y est une uniformisante de C en P.
3. Déterminer le développement limité de x en P à l'ordre 5 par rapport à y.
4. Montrer que ce développement limité ne contient que des puissances paires de y.
5. Montrer que les coefficients de ce développement limité appartiennent à l'image de $\mathbf{Z}[\frac{1}{3}]$ dans k.

6. On suppose $\mathrm{car}(k) = 3$. Montrer que $Q = (-1, 1)$ est un point lisse de C et déterminer la tangente de C en Q.
7. Montrer que $x + 1$ est une uniformisante de C en Q.
8. Déterminer l'ordre d'annulation de $y - 1$ en Q, puis son développement limité en Q à la précision $O((x + 1)^{10})$.

Exercice 6

Soit C une courbe affine plane irréductible. On suppose que C est rationnelle et on fixe $t \in k(C)$ telle que $k(C) = k(t)$. Soit P un point lisse de C.

1. On suppose que t est régulière en P et on pose $\lambda = t(P)$. Montrer que $t - \lambda$ est une uniformisante de C en P (on pourra remarquer que $k(t) = k(t - \lambda)$).
2. On suppose que t a un pôle en P. Montrer que $\mathrm{ord}_P(t) = -1$ et que $\frac{1}{t}$ est une uniformisante de C en P.
3. Décrire $\mathcal{O}_{C,P}$ dans chacun des cas précédents.
4. Montrer qu'il existe au plus un point lisse de C qui est un pôle de t.

Exercice 7 – Théorème d'approximation

1. Soit K un corps et $v_1, \dots, v_n$ des valuations discrètes sur K deux à deux distinctes. Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit $x_i \in K$ et $n_i \in \mathbf{Z}$. Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $v_i(x - x_i) \geq n_i$.
2. Soit C une courbe affine plane irréductible et P, P' des points lisses de C. Montrer que si les valuations discrètes ord_P et $\mathrm{ord}_{P'}$ coïncident, alors $P = P'$.
3. En déduire que si S est un ensemble fini de points lisses de C, alors pour toute famille $(f_P)_{P \in S}$ de $k(C)$ et toute famille $(n_P)_{P \in S}$ de $\mathbf{Z}$, il existe $f \in k(C)$ telle que $\mathrm{ord}_P(f - f_P) \geq n_P$ pour tout $P \in S$.