Géométrie algébrique élémentaire – TD 7

Soit k un corps.

Exercice 1

Soit E un k-espace vectoriel et $\pi : E - \{0\} \to \mathbf{P}(E)$ la surjection canonique. Soit $\mathcal{F} \subset E$ un sous-espace affine de E ne contenant pas 0. Montrer que la restriction de π à $\mathcal{F}$ est injective.

Exercice 2

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et E^* le dual de E.

1. Montrer que l'ensemble des hyperplans vectoriels de E est en bijection naturelle avec $\mathbf{P}(E^*)$.
2. En déduire que l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^2(k)$ est en bijection naturelle avec $\mathbf{P}^2(k)$.
3. Montrer que l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^2(k)$ passant par un point donné $p \in \mathbf{P}^2(k)$ correspond, via la bijection précédente, à une droite projective p^* de $\mathbf{P}^2(k)$.
4. Montrer que la correspondance $p \leftrightarrow p^*$ est bijective (*dualité projective*).

Exercice 3

Montrer que si k est algébriquement clos, tout élément de $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ a un point fixe dans $\mathbf{P}^n(k)$. Est-ce encore vrai si k n'est pas algébriquement clos ?

Exercice 4

Soit D, D' deux droites du plan projectif $\mathbf{P}^2(k)$ et m un point de $\mathbf{P}^2(k)$ n'appartenant ni à D ni à D'.

1. Montrer que pour tout $x \in D$, la droite (mx) rencontre D' en un unique point, noté $f(x)$.
2. Montrer que $f : D \to D'$ est une transformation projective bijective (on l'appelle *perspective de centre m de D sur D'*).

Exercice 5

Dans cet exercice, on identifie $\mathbf{P}^1(k)$ à $k \cup \{\infty\}$.

1. Montrer que tout élément $f \in \mathrm{PGL}_2(k)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in k$ tels que $ad - bc \neq 0$.
2. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(k)$ agit 3-transitivement sur $\mathbf{P}^1(k)$.
3. Déterminer le stabilisateur de ∞ dans $\mathrm{PGL}_2(k)$.
4. Déterminer le groupe des éléments de $\mathrm{PGL}_2(k)$ stabilisant 0 et ∞.
5. Soit $a, b \in \mathbf{P}^1(k)$ distincts. Montrer que le groupe $\{g \in \mathrm{PGL}_2(k); g(a) = a \text{ et } g(b) = b\}$ est isomorphe à k^*.

Exercice 6

On identifie dans cet exercice $\mathbf{A}^n(k)$ à une partie de $\mathbf{P}^n(k)$ via l'application qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $(x_1 : \ldots : x_n : 1)$. Soit $H_\infty = \mathbf{P}^n(k) - \mathbf{A}^n(k)$. Montrer que le groupe affine de $\mathbf{A}^n(k)$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ formé des élements g tels que $g(H_\infty) = H_\infty$.

On suppose désormais que k est algébriquement clos.

Exercice 7
Montrer que toute suite décroissante de fermés algébriques de $\mathbf{P}^n(k)$ est stationnaire.

Exercice 8
Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques non nulles sur k^3.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_3(k)$ agit sur $\mathcal{Q}$ et donner des représentants des orbites de cette action.
2. Soit $P \in k[X,Y,Z]$ un polynôme homogène non nul de degré 2, et $C = V(P)$ la conique associée. Montrer que C est projectivement équivalente à un cercle ou à la réunion de deux droites éventuellement confondues.

Exercice 9
Soit $f : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^4$ l'application régulière définie par $f(x,y) = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$.

1. Montrer que f induit une application $\overline{f} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$.
2. Montrer que $\overline{f}$ est injective et que $\overline{f}(\mathbf{P}^1)$ est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^3$.
3. Décrire $\overline{f}(\mathbf{P}^1) \cap \mathbf{A}^3$.

Exercice 10
On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $G_{2,4} = G_{2,4}(k)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de k^4 de dimension 2.

1. Soit $P \in G_{2,4}$ et (e_1, e_2) une base de P. Montrer que l'image de $e_1 \wedge e_2$ dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ est bien définie et ne dépend que de P (on la note $f(P)$).
2. Montrer que l'application $f : G_{2,4} \to \mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ définie ci-dessus est injective.
3. Montrer que tout élément de $\bigwedge^2 k^3$ est de la forme $x \wedge y$ avec $x, y \in k^3$, puis que tout élément de $\bigwedge^2 k^4$ est de la forme $x \wedge y + z \wedge t$ avec $x, y, z, t \in k^4$.
4. Soit $v \in \mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4)$ et $\widetilde{v} \in \bigwedge^2 k^4$ un représentant de v. Montrer que v est dans l'image de f si et seulement si $\widetilde{v} \wedge \widetilde{v} = 0$.
5. En déduire que l'image de f est un fermé algébrique de $\mathbf{P}(\bigwedge^2 k^4) \cong \mathbf{P}^5(k)$.