Géométrie algébrique élémentaire – TD 8

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1

1. Démontrer la variante suivante du théorème fondamental de l'élimination projective : si F est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^m(k) \times \mathbf{P}^n(k)$, alors $p_2(F)$ est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^n(k)$.
2. En déduire qu'une application régulière $f : \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^n$ est fermée (l'image d'un fermé algébrique de $\mathbf{P}^m$ est un fermé algébrique de $\mathbf{P}^n$).

Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer que si $f : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^n$ est une application régulière, l'image de f est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^n$.

1. Montrer que f se prolonge en une application $\overline{f} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$ et que l'on a $f(\mathbf{A}^1) = \overline{f}(\mathbf{P}^1) \cap \mathbf{A}^n$.
2. En utilisant l'exercice 1, montrer que $f(\mathbf{A}^1)$ est un fermé algébrique de $\mathbf{A}^n$.

Exercice 3 – Hypersurfaces projectives

Le but de cet exercice est de décrire l'idéal associé à une hypersurface projective.

1. Soit $P \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène non nul. Montrer que si $P = P_1 P_2$ alors P_1 et P_2 sont homogènes (on pourra considérer les composantes homogènes des P_i).
2. On suppose P non constant et on note $H = V(P)$ l'hypersurface de $\mathbf{P}^n(k)$ associée à P. Posons $P = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$, où les P_i sont irréductibles et deux à deux non associés dans $k[X_0, \ldots, X_n]$. Montrer que les P_i sont homogènes et que $I(H) = \left(\prod_{i=1}^r P_i\right)$.

Exercice 4 – Densité des polynômes irréductibles

Soit n, d des entiers ≥ 1. On note $P = \mathbf{P}(k[X_0, \ldots, X_n]_d)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d en $X_0, \ldots, X_n$.

1. Montrer que l'ensemble $R \subset P$ formé des classes de polynômes réductibles est un fermé algébrique de P.
2. On suppose que $n \geq 2$ et que d n'est pas divisible par la caractéristique de k. Montrer que le polynôme $X_0^d + \cdots + X_n^d$ est irréductible et en déduire que l'ensemble des classes de polynômes irréductibles est un ouvert dense de P (pour la topologie de Zariski).
3. Que se passe-t-il si $n = 1$?