Géométrie algébrique élémentaire – TD 9

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1

Soit $n \geq 1$ un entier non divisible par la caractéristique de k. On considère la courbe de Fermat C_n de degré n, définie par $C_n = V(X^n + Y^n - 1)$.

1. Quelle est la complétion projective $\overline{C_n}$ de C_n ?
2. Combien C_n possède-t-elle de points à l'infini ?
3. Montrer que $\overline{C_n}$ est lisse.
4. Déterminer les tangentes de $\overline{C_n}$ aux points à l'infini.
5. Montrer que la fonction rationnelle x a un pôle simple en chaque point à l'infini de C_n.
6. On suppose $n = 3$. Déterminer les zéros et les pôles dans $\overline{C_n}$ de la fonction rationnelle $f = x + y$ (pour chaque zéro ou pôle, on précisera l'ordre d'annulation de f en ce point).

Exercice 2

Soit C une courbe affine plane et P un point lisse de C. Montrer que $T_P\overline{C}$ est la complétion projective de T_PC.

Exercice 3

Soit C, C' deux courbes affines planes irréductibles et $\varphi : C \to C'$ une application régulière.

1. Montrer qu'il existe une application rationnelle $\overline{\varphi} : \overline{C} \dashrightarrow \overline{C'}$ qui est définie (au moins) sur C et qui coïncide avec φ sur C.
2. Préciser en quel sens $\overline{\varphi}$ est unique.

Exercice 4

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \notin \{2, 3\}$. Considérons la cubique de Fermat C_3 : $x^3 + y^3 = 1$. Nous avons vu (cf. TD 3, exercice 8) qu'en posant $t = \frac{12}{x+y}$ et $u = \frac{36(y-x)}{x+y}$ et $\varphi = (t, u)$, on obtient une application régulière $\varphi : C_3 \to C$, avec $C : u^2 = t^3 - 432$.

1. Expliciter l'application rationnelle $\overline{\varphi} : \overline{C_3} \dashrightarrow \overline{C}$ définie dans l'exercice 2.
2. Montrer que $\overline{\varphi}$ est un morphisme et que $\overline{\varphi}$ est restriction d'une homographie $h : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$.
3. En déduire que $\overline{C_3}$ et $\overline{C}$ sont isomorphes.

Exercice 5

Soit C la courbe affine plane d'équation $y^2 = x^3 - x^4$ (on rappelle que C est irréductible).

1. Montrer que $\varphi = (x : x^2 : y)$ définit une application rationnelle de $\overline{C}$ vers une courbe projective plane C' que l'on explicitera.
2. Déterminer l'ensemble de définition D_φ de φ.
3. Montrer qu'il existe un morphisme $\psi : C' \to \overline{C}$ tel que pour tout $P \in D_\varphi$, on ait $\psi(\varphi(P)) = P$.
4. Le morphisme ψ est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 6

Soit $H \in k[X, Y, Z]$ un polynôme homogène irréductible et $C = V(H)$ la courbe projective plane associée. Montrer que si $f \in k(C)$ est régulière sur C, alors $f \in k$.

Exercice 7

On suppose dans cet exercice $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $F \in k[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note C_F la courbe affine plane d'équation $y^2 = F(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que si C_F est lisse, alors C_F est irrationnelle.

Par l'aburde, supposons donc que C_F est lisse et que $k(C_F) = k(f)$ avec $f \in k(C_F)$.

1. Montrer que C_F possède un unique point à l'infini P_∞ et que $\overline{C_F}$ est lisse.
2. Montrer que si $P \in \overline{C_F}$ est un pôle de f, alors $\mathrm{ord}_P(f) = -1$ (on pourra commencer par montrer que pour tout $g \in k[f] - \{0\}$, on a $\mathrm{ord}_P(f) \mid \mathrm{ord}_P(g)$).
3. Montrer qu'il existe au plus un point de $\overline{C_F}$ qui est un pôle de f.
4. Montrer qu'il existe $g \in k(C_F)$ ayant un pôle simple en P_∞ et telle que $k(C_F) = k(g)$ (on pourra prendre g de la forme $1/(f - \lambda)$ avec $\lambda \in k$).
5. Montrer que $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = 2$ et $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = 3$.
6. En déduire que C_F est irrationnelle.