

Géométrie algébrique élémentaire – TD 10

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1

Paramétrer la conique $C : x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

Exercice 2

On suppose dans cet exercice $k = \mathbf{C}$. Soit C la conique affine d'équation $x^2 + y^2 = 2$.

1. Trouver un paramétrage de C par des fractions rationnelles de $\mathbf{Q}(t)$.
2. Montrer que le paramétrage $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \overline{C}$ obtenu induit une bijection entre $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ et $\overline{C} \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$.
3. Existe-t-il un paramétrage de $C' : x^2 + y^2 = 3$ par des éléments de $\mathbf{Q}(t)$?

Exercice 3

On suppose dans cet exercice $\text{car}(k) \neq 2$. Soit C une conique projective irréductible. Montrer que par tout point de $\mathbf{P}^2$ situé hors de C , il passe exactement deux tangentes de C .

Exercice 4

On considère la cubique affine plane $C : x^3 + y^3 + xy = 0$.

1. Montrer que $P = (0, 0)$ est un point double ordinaire de C .
2. Trouver un paramétrage de C .
3. Montrer que ce paramétrage s'étend en un morphisme $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \overline{C}$.
4. Déterminer $\varphi^{-1}(P)$.

Exercice 5

On considère la cubique affine plane $C : y^2 = x^3$.

1. On suppose $\text{car}(k) = 2$. Montrer que toutes les tangentes de $\overline{C}$ passent par un même point de $\overline{C}$ que l'on déterminera.
2. On suppose $\text{car}(k) = 3$. Montrer que toutes les tangentes de $\overline{C}$ passent par un même point de $\mathbf{P}^2$ que l'on déterminera.
3. On suppose $\text{car}(k) \neq 2, 3$. Montrer que pour tout point lisse $P_0 \in C$, il existe un unique point lisse $P_1 \in C$ distinct de P_0 tel que la tangente de C en P_1 passe par P_0 .

Exercice 6

On prend ici $k = \mathbf{C}$. On considère la courbe $E : y^2 + y = x^3 - x^2$ et on pose $P_1 = (0, 0) \in E$.

1. Montrer que P_1 est un point lisse de E et que $(T_{P_1} E) \cap E = \{P_1, P_2\}$ avec un point P_2 que l'on déterminera.
2. Que se passe-t-il si on itère le procédé ci-dessus ?
3. Mêmes questions avec $E : y^2 + y = x^3 - x$ et $P_1 = (0, 0)$.

Exercice 7

On suppose dans cet exercice $\text{car}(k) \neq 2$. Soit $F \in k[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note C_F la cubique affine plane d'équation $y^2 = F(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que si C_F est lisse, alors C_F est irrationnelle.

Par l'aburde, supposons donc que C_F est lisse et que $k(C_F) = k(f)$ avec $f \in k(C_F)$.

1. Montrer que C_F possède un unique point à l'infini P_∞ et que $\overline{C_F}$ est lisse.
2. Montrer que si $P \in \overline{C_F}$ est un pôle de f , alors $\text{ord}_P(f) = -1$ (on pourra commencer par montrer que pour tout $g \in k[f] - \{0\}$, on a $\text{ord}_P(f) \mid \text{ord}_P(g)$).
3. Montrer qu'il existe au plus un point de $\overline{C_F}$ qui est un pôle de f .
4. Montrer qu'il existe $g \in k(C_F)$ ayant un pôle simple en P_∞ et telle que $k(C_F) = k(g)$ (on pourra prendre g de la forme $1/(f - \lambda)$ avec $\lambda \in k$).
5. Montrer que $\text{ord}_{P_\infty}(x) = 2$ et $\text{ord}_{P_\infty}(y) = 3$.
6. En déduire que C_F est irrationnelle.