Géométrie algébrique élémentaire – TD 11

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ dans $\mathbf{P}^2(k)$, et pour chaque point $P \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$, calculer la multiplicité d'intersection $m_P(\overline{C_1}, \overline{C_2})$:

(a) $C_1 : y = x, \quad C_2 : y = x^2$;
(b) $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : x^2 + y^2 = 2$;
(c) $C_1 : x + y = 1, \quad C_2 : x^3 + y^3 = 1$;
(d) $C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^3$.

Exercice 2
Pour chacune des courbes C ci-dessous, calculer la multiplicité d'intersection en $P = (0, 0)$ de C avec une droite D passant par P (on distinguera suivant D) :

(a) $C : xy = 2x^2 - y^2$;
(b) $C : y^2 = x^3$;
(c) $C : xy = y^4 - x^3$.

Exercice 3
On suppose $\mathrm{car}(k) = p > 0$, et on considère la courbe affine plane $C : y = x^{p+1}$.

1. Montrer que C est lisse et que toutes ses tangentes passent par le point $(0, 0)$.
2. Vérifier le théorème de Bézout pour l'intersection de C avec chacune de ses tangentes.

Exercice 4
Soit $H \in k[X, Y, Z]$ un polynôme homogène irréductible de degré $d \geq 1$. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que la courbe $C = V(H)$ possède au plus $\frac{d(d-1)}{2}$ points singuliers (on pourra considérer l'intersection de C avec la courbe définie par une dérivée partielle de H).

Exercice 5
Soit C une courbe affine plane et $P \in C$. Soit $\mu \geq 1$ la multiplicité de P (on convient que si P est un point lisse de C alors $\mu = 1$).

1. Soit D une droite passant par P. Montrer que D est une tangente de C en P si et seulement si $m_P(C, D) > \mu$.
2. On suppose dans cette question $\mathrm{car}(k) = 0$, et on note $d \geq 1$ le degré de C. Montrer qu'à l'exception d'un nombre fini de droites, une droite passant par P intersecte C en exactement $d - \mu$ points distincts.

Exercice 6
On suppose dans cet exercice $k = \mathbf{C}$. Soit $a, b \in \mathbf{C}$. On considère la courbe affine plane $E : y^2 = x^3 + ax + b$. On note D_∞ la droite à l'infini. Soit $P_\infty = (0 : 1 : 0) \in \overline{E}$.

1. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que $m_{P_\infty}(\overline{E}, D_\infty) = 3$.

Soit maintenant $d \in \mathbf{C}^*$ et C la cubique projective d'équation $X_0^3 + X_1^3 + dX_2^3 = 0$.

2. Déterminer la tangente T de C au point $O = (1 : -1 : 0)$.
3. Déterminer $C \cap T$ et en déduire $m_O(C, T)$.
4. En utilisant une homographie envoyant T à l'infini, montrer que C est projectivement équivalente à la complétion de la courbe $E : y^2 = x^3 - 432d^2$.

Exercice 7

Soient C, C' et C'' des courbes affines planes, deux à deux sans composante commune. Montrer que pour tout point $P \in \mathbf{A}^2$, on a $m_P(C \cup C', C'') = m_P(C, C'') + m_P(C', C'')$.