Plan du cours *Courbes et jacobiennes* par F. Brunault (1er semestre M2 2010-2011).

Plan général :
I. Introduction aux surfaces de Riemann (4 cours)
II. Introduction aux courbes algébriques (5 cours)
III. Jacobiennes (3 cours)

I. Introduction aux surfaces de Riemann

Cours 1 : tores complexes (cf. chap. 1 de mes notes de cours de M2 2008/2009)
1. Réseaux de $\mathbf{C}$; fonctions elliptiques ; diviseurs.
2. Fonction $\wp$ de Weierstraß ; le corps des fonctions elliptiques est engendré par $\wp$ et $\wp'$; caractérisation des diviseurs principaux.
3. Équation différentielle satisfaite par $\wp$; réalisation de $\mathbf{C}/\Lambda$ comme cubique plane projective.

Cours 2 : définition et exemples de surfaces de Riemann
1. Définition des surfaces de Riemann à l'aide de cartes.
2. Définition équivalente en termes de faisceaux de $\mathbf{C}$-algèbres de fonctions sur un espace topologique.
3. Exemples : sphère de Riemann ; tores complexes ; surfaces de Riemann (ouvertes) associées aux courbes algébriques planes (affines et lisses).
4. Énoncé du théorème d'existence des quotients des surfaces de Riemann.

Cours 3 : fonctions sur les surfaces de Riemann
1. Corps des fonctions méromorphes ; ordre d'annulation en un point ; principes des zéros isolés et du prolongement analytique.
2. Exemples : fractions rationnelles sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$; fonctions elliptiques.
3. Les diviseurs principaux sont de degré 0 (démonstration par Stokes).
4. Applications holomorphes entre surfaces de Riemann ; interprétation des fonctions méromorphes comme morphismes vers $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$; tout morphisme entre surfaces de Riemann compactes connexes est constant ou surjectif.

Cours 4 : formes différentielles sur les surfaces de Riemann
1. Extension de corps $\varphi^* : \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ associée à un morphisme $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$.
2. Espace de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$ associé à $D \in \mathrm{Div}(X)$; démonstration qu'ils sont de dimension finie.
3. Définition de l'espace des 1-formes différentielles holomorphes ; équivalence avec les formes fermées de type $(1,0)$; définition du genre d'une surface de Riemann compacte ; calcul du genre de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et de $\mathbf{C}/\Lambda$.
4. Formes différentielles méromorphes sur X ; diviseurs associés ; structure de $\mathcal{M}(X)$-espace vectoriel de dimension ≤ 1 (égalité admise) ; énoncé du théorème de Riemann-Roch.

II. Introduction aux courbes algébriques

Cours 5 et 6 : courbes planes (cf. chap. 2 de mes notes de cours de M2 2008/2009)

1. Les espaces $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{P}^n$ et leurs fermés algébriques.
2. Courbes planes affines et projectives ; passage de l'affine au projectif et réciproquement ; irréductibilité.
3. Fonctions régulières et rationnelles sur une courbe affine plane irréductible.
4. Anneau local d'une courbe affine en un point ; exemples.
5. Fonctions rationnelles sur une courbe projective plane irréductible ; exemples de calcul dans des cartes affines et de changement de carte.
6. Lissité d'une courbe affine ou projective en un point ; définition de la tangente ; exemples.
7. Équivalences P lisse $\Leftrightarrow \dim \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{m}_P$ principal ; définition d'une uniformisante.

Cours 7 et 8 : morphismes entre courbes

1. Ordre d'annulation d'une fonction rationnelle en un point lisse.
2. Rappels sur les anneaux de valuation discrète et anneaux de Dedekind.
3. Si C est une courbe affine lisse alors $k[C]$ est un anneau de Dedekind (et les anneaux locaux de C sont de valuation discrète).
4. Analogue du théorème d'Ostrowski pour le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective lisse.
5. Morphismes et applications rationnelles entre courbes affines ou projectives ; régularité des applications rationnelles aux points lisses.
6. Extension de corps associée à un morphisme ; degré ; indices de ramification.
7. Interprétation du degré comme nombres de préimages : $\deg \varphi = \sum_{\varphi(P)=Q} e_P(\varphi)$ (démonstration par les anneaux de Dedekind).
8. Corollaires : tout diviseur principal est de degré 0 ; tout morphisme entre courbes projectives irréductibles lisses est constant ou surjectif.
9. Développement limité d'une fonction rationnelle en un point lisse ; lien avec la complétion de l'anneau local ; exemples.

Cours 9 : formes différentielles et Riemann-Roch

1. Formes différentielles rationnelles sur les courbes projectives ; structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur le corps des fonctions rationnelles.
2. Ordre d'annulation et développement limité d'une forme différentielle en un point lisse.
3. Définition du genre ; exemple de la courbe $C : y^2 = x^3 - 1$.
4. Énoncé du théorème de Riemann-Roch.
5. Éléments de preuve : énoncé de la dualité de Serre et interprétation de $\ell(D) - \ell(K_C - D)$ comme la caractéristique d'Euler du complexe $k(C) \to \bigoplus_{P \in C} \frac{k(C)}{\mathcal{F}_P}$ où $\mathcal{F}$ est le “faisceau” $\mathcal{O}(D)$.

III. Jacobiennes

Cours 10 : définition de la jacobienne d'une surface de Riemann compacte

1. Définition de $H_1(X, \mathbf{Z})$ pour un espace topologique X.

2. Faits de topologie des surfaces (sans démonstration) : genre d'une surface $\mathcal{C}^\infty$ compacte orientable X ; isomorphisme $H_1(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2g}$ et théorème de de Rham.

3. Décomposition de Hodge $H^1_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C}) \cong \Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega^1(X)}$ pour une surface de Riemann compacte.

4. Définition de $\mathrm{Jac}(X)$ comme $\Omega^1(X)^\vee / H^1(X, \mathbf{Z})$; démonstration que c'est un tore complexe.

5. Application d'Abel-Jacobi $\mathrm{Div}^0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$; démonstration que les diviseurs principaux sont dans le noyau.

Cours 11 : fibrés en droites holomorphes

1. Définition cartographique d'un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann ; sections holomorphes et $\mathcal{C}^\infty$ d'un tel fibré ; définition d'une trivialisation sur un ouvert.

2. Construction de fibrés en droites holomorphes par recollement ; application : définition du fibré canonique Ω^1_X et du fibré $\mathcal{O}(D)$ associé à $D \in \mathrm{Div}(X)$.

3. Produit tensoriel de fibrés en droites holomorphes ; dual d'un fibré en droites holomorphe ; définition du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$.

4. Sections méromorphes des fibrés en droites ; degré d'un fibré.

5. L'application $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{Pr}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}^0(X)$.

Cours 12 : théorème d'Abel-Jacobi

1. Démonstration du fait que pour X surface de Riemann compacte connexe, l'application d'Abel-Jacobi induit un isomorphisme $\mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{Pr}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(X)$.

2. Quelques propriétés supplémentaires de la jacobienne (sans démonstration) : plongement $X \hookrightarrow \mathrm{Jac}(X)$, lien entre $\mathrm{Jac}(X)$ et $\mathrm{Sym}^g(X)$, théorème de Torelli.

François Brunault • *E-mail :* brunault@umpa.ens-lyon.fr, ÉNS Lyon, UMPA, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France