Université Lyon 1 - ÉNS Lyon M1 2009-2010

Géométrie algébrique élémentaire
Examen final du 21 mai 2010 (14h-17h)

Note importante : les documents ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera particulièrement prise en compte lors de l'évaluation des copies. Les démonstrations devront s'appuyer sur les seuls résultats du cours. Pensez à justifier ce que vous affirmez !

Exercice

On fixe dans cet exercice un corps k algébriquement clos.

1. Soit $C \subset \mathbf{A}^2(k)$ une courbe affine plane. Donner deux définitions équivalentes de la lissité pour un point $P \in C$.
2. Étudier la courbe $C : y^2 + x^2y + x = 0$ de $\mathbf{A}^2(k)$. On déterminera notamment $I(C)$, la courbe $\overline{C}$, les points à l'infini et les points singuliers éventuels de $\overline{C}$ (on distinguera suivant la caractéristique de k).
3. Déterminer l'ordre d'annulation de $x, y, x + y^2 \in k[C]$ en $O = (0, 0)$.

Problème – Points d'inflexion sur une cubique

On se donne un polynôme $F \in \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]$ homogène de degré 3, irréductible, et tel que la courbe projective $C = V(F)$ soit lisse.

On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des points d'inflexion de C, c'est-à-dire l'ensemble des $P \in C$ tels que $m_P(C, T) > 2$, où T désigne la tangente de C en P.

Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on pose $F_i = \frac{\partial F}{\partial X_i}$ et $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}$. On note H_F le déterminant de la matrice $M = (F_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3])$.

Pour tout entier $d \geq 0$, on note $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]$ formé des polynômes homogènes de degré d.

1. Montrer que $H_F \in \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]_3$.
2. Soit $G \in \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3]_e$. Montrer la relation d'Euler $\sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial G}{\partial X_i} = eG$.
3. En déduire $\sum_{i=1}^3 X_i F_i = 3F$ et $\sum_{j=1}^3 X_j F_{ij} = 2F_i$.
4. À l'aide d'opérations élémentaires sur M, montrer les identités

$$X_3^2 H_F = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & X_3F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & X_3F_{23} \\ X_3F_{31} & X_3F_{32} & X_3^2F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & 2F_1 \\ F_{21} & F_{22} & 2F_2 \\ 2F_1 & 2F_2 & 6F \end{vmatrix}.$$

5. En déduire $X_3^2 H_F \equiv 8F_1F_2F_{12} - 4F_1^2F_{22} - 4F_2^2F_{11} \pmod{F}$.

Dans les questions (6) à (15), on suppose que $P_0 = (0:0:1) \in C$ et que la tangente de C en P_0 est la droite $T : X_2 = 0$. On pose $\widetilde{P_0} = (0,0,1)$.

6. Montrer que $F_1(\widetilde{P_0}) = 0$ et $F_2(\widetilde{P_0}) \neq 0$.
7. En déduire que $P_0 \in V(H_F)$ équivaut à $F_{11}(\widetilde{P_0}) = 0$.

On considère la carte affine $\{(x:y:1); x,y \in \mathbf{C}\} \cong \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On pose $f = F(X,Y,1) \in \mathbf{C}[X,Y]$ et on note $C_f = V(f) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ la courbe affine associée à f. On désigne par x (resp. y) l'image de X (resp. Y) dans $\mathbf{C}[C_f]$. Enfin, on pose $O = (0,0) \in C_f$.

8. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial X}(O) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial Y}(O) \neq 0$.
9. Quelle est l'équation de T dans cette carte affine ? En déduire $\mathrm{ord}_O(y) = m_{P_0}(C,T)$ et $\mathrm{ord}_O(y) \in \{2,3\}$.
10. Montrer que x est une uniformisante de C_f en O.
11. En utilisant la relation $\frac{\partial f}{\partial X}(x,y)\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial Y}(x,y)\ \mathrm{d}y = 0$ dans $\Omega^1(C_f)$, montrer que $\mathrm{ord}_O(\mathrm{d}y) = \mathrm{ord}_O(\frac{\partial f}{\partial X}(x,y))$.
12. Établir le développement limité $\frac{\partial f}{\partial X}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(O)\cdot x + O(x^2)$ à l'ordre 2 au point O.
13. Démontrer que $\mathrm{ord}_O(\mathrm{d}y) = \mathrm{ord}_O(y) - 1$.
14. Déduire des questions précédentes que $P_0 \in \mathcal{I}$ équivaut à $P_0 \in V(H_F)$.
15. Montrer que si $P_0 \in \mathcal{I}$ alors $m_{P_0}(C, V(H_F)) = 1$ (on pourra commencer par établir que $\frac{\partial^3 f}{\partial X^3}(O) \neq 0$).
16. Soit $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ et $F_g \in \mathbf{C}[X_1,X_2,X_3]$ l'unique polynôme tel que $F_g(x) = F(gx)$ pour tout $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{C}^3$. Montrer que $H_{F_g}(x) = (\det g)^2 \cdot H_F(gx)$ pour tout $x \in \mathbf{C}^3$.
17. Montrer que $\mathcal{I} = C \cap V(H_F)$ et que $m_P(C, V(H_F)) = 1$ pour tout $P \in \mathcal{I}$.
18. Déduire du théorème de Bézout que $\#\mathcal{I} = 9$.
19. Soit $P_1, P_2 \in \mathcal{I}$ distincts. Montrer que la droite $D = (P_1P_2)$ coupe C en un troisième point $P_3 \notin \{P_1, P_2\}$ et que l'on a $P_3 \in \mathcal{I}$.

On suppose que C est une cubique réelle, *i. e.* $F \in \mathbf{R}[X_1,X_2,X_3]$.

20. Montrer que C possède au moins un point d'inflexion réel (on pourra utiliser la conjugaison complexe $c : (x:y:z) \mapsto (\overline{x}:\overline{y}:\overline{z})$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$).
21. Montrer que $\#(\mathcal{I} \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{R})) = 3$.