Examen final du mardi 4 janvier 2011 (15h30-18h30)

Courbes et jacobiennes (F. Brunault, M2R Lyon)

Exercice 1. Points de Weierstrass

Soit X une surface de Riemann compacte connexe, de genre $g \geq 1$. On note $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X. Pour tout diviseur D sur X, on note $\mathcal{L}(D)$ l'espace vectoriel des $f \in \mathcal{M}(X)$ vérifiant $\mathrm{div}(f) \geq -D$, et on pose $\ell(D) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{L}(D)$.

(1) Énoncer le théorème de Riemann-Roch pour X.

(2) Soit $P \in X$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ non constante admettant P comme unique pôle, d'ordre inférieur ou égal à $g+1$.

On dit que P est un point de Weierstraß de X s'il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ non constante admettant P comme unique pôle, d'ordre $\leq g$.

(3) Montrer que P est un point de Weierstraß si et seulement si il existe $\omega \in \Omega^1(X) - \{0\}$ telle que $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq g$.

(4) Montrer que les tores complexes n'ont pas de point de Weierstraß.

On suppose désormais $g \geq 2$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de $\Omega^1(X)$. Si z est une coordonnée holomorphe locale sur X, on pose $\omega_i = f_i(z)dz$ pour $1 \leq i \leq g$, et on définit

$$W(z) = \det \begin{pmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ f_1'(z) & \cdots & f_g'(z) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(g-1)}(z) & \cdots & f_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

(5) Montrer que les sections locales $W(z)(dz)^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ du fibré en droites holomorphe $(\Omega^1_X)^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ se recollent en une section globale s sur X (on pourra calculer l'effet d'un changement de cartes holomorphe sur W, en commençant par le cas $g = 2$).

(6) Combien s possède-t-elle de zéros (comptés avec multiplicité) ? En déduire qu'il existe au moins un point de Weierstraß sur X.

T.S.V.P.

Exercice 2. Quartique de Klein

On fixe un corps k algébriquement clos. Soit C la courbe algébrique projective plane définie sur k d'équation $X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$. On note $x = X/Z$ et $y = Y/Z$ les coordonnées affines usuelles sur C. Soit σ l'automorphisme de C défini par $\sigma(X : Y : Z) = (Y : Z : X)$. Enfin, on pose $p = (0 : 0 : 1)$, $q = \sigma(p)$ et $r = \sigma^2(p)$.

(1) Montrer que C est irréductible.

(2) Soit $P_0 = (x_0 : y_0 : 1) \in C$. Montrer que si $x_0^3 + 3y_0^2 \neq 0$ (resp. $3x_0^2y_0 + 1 \neq 0$), alors $x - x_0$ (resp. $y - y_0$) est une uniformisante en P_0.

(3) Montrer que C est lisse si et seulement si $\mathrm{car}(k) \neq 7$.

On suppose désormais que C est lisse.

(4) Calculer le diviseur de $\omega = dx/(x^3 + 3y^2)$ (on remarquera que $\omega = -dy/(3x^2y + 1)$).

(5) En déduire que C est de genre 3.

(6) Montrer que $B = (\omega, \sigma^*\omega, (\sigma^2)^*\omega)$ est une base de $\Omega^1(C)$.

(7) Montrer que si $\mathrm{car}(k) \neq 3$, la droite passant par les deux points fixes de σ est bitangente à C.

(8) Montrer que le groupe des automorphismes de C de la forme $(X : Y : Z) \mapsto (\alpha X : \beta Y : \gamma Z)$ est engendré par un élément τ d'ordre 7.

On suppose désormais $k = \mathbf{C}$.

(9) Montrer que le diviseur $[p]-[q]$ définit un point d'ordre 7 de $\mathrm{Jac}(C)$ (on pourra considérer les diviseurs principaux fournis en comparant les éléments de B).

(10) Montrer que les points de $\mathrm{Jac}(C)$ fixés par σ forment un tore complexe E de dimension 1.

(11) Soit e l'endomorphisme de $\mathrm{Jac}(C)$ défini par $e = \tau + \tau^2 + \tau^4$. Montrer que e préserve E.

(12) En déduire que l'anneau des endomorphismes du tore complexe E contient $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$.