Université Lyon 1 - ÉNS Lyon M1 2009-2010

Géométrie algébrique élémentaire
Examen partiel du 19 mars 2010 (14h-16h)

Note importante : les documents ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera particulièrement prise en compte lors de l'évaluation des copies. Les démonstrations devront s'appuyer sur les seuls résultats du cours. Pensez à justifier ce que vous affirmez !

On fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1

Soit V un fermé algébrique non vide de $\mathbf{A}^n(k)$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que tout fermé algébrique de $\mathbf{A}^n(k)$ inclus dans V est le lieu des zéros d'une famille finie de fonctions régulières $f_1, \ldots, f_r \in k[V]$.
2. Montrer que V est irréductible si et seulement si $I(V)$ est un idéal premier de $k[X_1, \ldots, X_n]$.
3. Montrer que si $k[V]$ est de dimension finie comme k-espace vectoriel, alors V est fini (on pourra commencer par le cas V irréductible).

Exercice 2

1. Quels sont les fermés algébriques de $\mathbf{P}^1(k)$? Justifier.

On munit $\mathbf{A}^2(k) - \{(0,0)\}$ de la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^2(k)$.

2. La projection canonique $\pi : \mathbf{A}^2(k) - \{(0,0)\} \to \mathbf{P}^1(k)$ est-elle continue ?
3. Est-elle fermée ?

Problème

On suppose dans ce problème $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $C \subset \mathbf{A}^2(k)$ la courbe affine plane d'équation $C : y^2 = x^4 + 1$.

1. Montrer que C est irréductible.

2. Montrer que C est lisse.
3. Déterminer la tangente de C en $P = (0, 1)$.
4. Montrer que $\mathrm{ord}_P(y-1) \geq 4$ et en déduire que x est une uniformisante en P.
5. Trouver une droite de $\mathbf{A}^2(k)$ passant par $(0,0)$ et tangente à C.
6. Déterminer les points à l'infini de C (on notera $\overline{C} \subset \mathbf{P}^2(k)$ la courbe projective associée à C).
7. On considère la carte affine $U = \{(x_0 : 1 : x_2); x_0, x_2 \in k\}$ de $\mathbf{P}^2(k)$. Déterminer l'équation de $\overline{C}$ dans cette carte.
8. La courbe $\overline{C}$ est-elle irréductible ? Est-elle lisse ?
9. On considère les fonctions $u = y + x^2$ et $v = ux$ dans $k(C)$. Déterminer l'ensemble des points de $\overline{C}$ en lesquels u (resp. v) est régulière.
10. Montrer que $k(C) = k(u, v)$.
11. Déterminer une relation de dépendance algébrique entre u et v.
12. Trouver une courbe projective $\widetilde{C}$ irréductible et lisse telle que $k(C) \cong k(\widetilde{C})$.

Questions hors barème, pour ceux qui s'ennuieraient à la fin de l'épreuve :

(i) Étant donné un point de $\mathbf{A}^2(k)$ « en position générale », combien de droites passant par ce point sont-elles tangentes à C ?

(ii) Combien la courbe C possède-t-elle de *bitangentes* (droites qui sont tangentes en deux points distincts de C) ?

(iii) Que deviennent les réponses aux questions (i) et (ii) si l'on remplace C par la quartique de Fermat $F_4 : x^4 + y^4 = z^4$ dans $\mathbf{P}^2(k)$? par une quartique projective lisse « générale » ?