Géométrie algébrique élémentaire
Examen partiel du 1er avril 2011 (13h30-15h30)

Note importante : les documents (cours ou TD) ne sont pas autorisés. Les démonstrations doivent s'appuyer sur les seuls résultats du cours. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation des copies.

On fixe un corps k algébriquement clos.

Exercice 1 – Étude d'une courbe affine plane

Soit C la courbe affine plane, définie sur k, d'équation $y^2 = x^3 - x^4$.

1. Montrer que la courbe C est irréductible.
2. Montrer que le point $O = (0,0)$ est le seul point singulier de C (on précisera sa multiplicité ainsi que la ou les tangente(s) de C en O).
3. Déterminer le domaine de définition de la fonction rationnelle $f = \frac{y}{x}$.
4. Montrer que y est une uniformisante de C en $P = (1,0)$.
5. Calculer le développement limité de f en P à la précision $O(y^7)$.
6. Montrer que f est entière sur $k[x]$.
7. Montrer qu'il existe une courbe affine plane C' telle que la k-algèbre $k[C']$ soit isomorphe à $k[x, f]$.
8. Montrer que la courbe C' est lisse.
9. Trouver une application régulière non constante $\varphi : C' \to C$.
10. Déterminer un paramétrage rationnel de C' et en déduire un paramétrage rationnel de C.

Exercice 2 – Densité des polynômes irréductibles

Pour tous entiers $n, d \geq 1$, on note $P_{n,d} = \mathbf{P}(k[X_0, \ldots, X_n]_d)$ l'espace projectif associé au k-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d de $k[X_0, \ldots, X_n]$.

1. On suppose $d = d_1 + d_2$ avec $d_1, d_2 \geq 1$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f_{d_1,d_2} : P_{n,d_1} \times P_{n,d_2} &\to P_{n,d} \\ ([Q_1], [Q_2]) &\mapsto [Q_1 Q_2] \end{aligned}$$

   est bien définie.
2. Montrer que l'image de f_{d_1,d_2} est un fermé algébrique de $P_{n,d}$ (on pourra utiliser sans le redémontrer le théorème de l'élimination projective pour la projection $P \times P' \times P'' \to P''$, où P, P' et P'' sont trois espaces projectifs de dimension finie sur k).

3. En déduire que l'ensemble $I_{n,d} \subset P_{n,d}$ formé des classes de polynômes irréductibles est un ouvert Zariski de $P_{n,d}$.

Dans les questions 4 et 5, on suppose $n \geq 2$.

4. Montrer que le polynôme $X_0^d + X_1^{d-1} X_2$ est irréductible dans $k[X_0, \ldots, X_n]$.
5. En déduire que $I_{n,d}$ est dense dans $P_{n,d}$ pour la topologie de Zariski.
6. Le résultat de la question 5 subsiste-t-il pour $n = 1$?