Examen partiel du mardi 2 novembre 2010 (16h15-18h15)

Courbes et jacobiennes (F. Brunault, M2R Lyon)

Exercice 1 (4 points)

On rappelle que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ désigne la sphère de Riemann.

(1) Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On suppose que f est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que f est un polynôme.

(2) Montrer que toute fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une fraction rationnelle.

(3) Calculer le diviseur de la forme différentielle méromorphe $\frac{dz}{z}$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

(4) Soit $P \in \mathbf{C}[X]\backslash\{0\}$. Calculer en termes de P le résidu en ∞ de la forme différentielle méromorphe $\omega = \frac{P'(z)}{P(z)}dz$.

Exercice 2 (6 points)

Soit X une surface de Riemann compacte connexe.

(1) Donner une définition du genre g de X et d'un diviseur canonique K_X sur X.

(2) Calculer g et K_X lorsque X est un tore complexe $\mathbf{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau de $\mathbf{C}$.

(3) Rappeler la définition de l'espace de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$, où D est un diviseur sur X.

(4) Que vaut $\mathcal{L}(0)$?

On rappelle le théorème de Riemann-Roch : pour tout diviseur D sur X, on a la formule $\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg D - g + 1$.

(5) Soit $P_0 \in X$. Déduire du théorème de Riemann-Roch l'existence d'une fonction méromorphe non constante sur X qui est holomorphe sur $X\backslash\{P_0\}$.

(6) Expliciter une telle fonction lorsque X est un tore complexe $\mathbf{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau de $\mathbf{C}$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (4 points)

Soit k un corps algébriquement clos.
Considérons la conique $C : y^2 + xy + 1 = 0$ dans $\mathbf{A}^2(k)$.

(1) Montrer que C est irréductible.

(2) Montrer que C est lisse.

(3) On suppose dans cette question $\mathrm{car}(k) = 2$. Montrer que toutes les tangentes de C passent par le point $(0, 0)$.

(4) On suppose dans cette question $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Déterminer les droites passant par $(0, 0)$ et tangentes à la complétion projective $\overline{C}$ de C.

Exercice 4 (6 points)

Soit k un corps algébriquement clos.

(1) Décrire l'anneau local de $\mathbf{A}^1(k)$ en 0 comme sous-anneau de $k(T)$. Quel est son idéal maximal ?

(2) Les anneaux locaux de $\mathbf{P}^1(k)$ en 0 et ∞ sont-ils isomorphes ?

Considérons la cubique $C : y^2 = x^3 - 1$ dans $\mathbf{A}^2(k)$.

(3) Montrer que C est irréductible.

(4) Montrer que C possède un unique point à l'infini P_∞, et que ce point est lisse. Quelle est la tangente de C en P_∞ ?

(5) La fonction rationnelle $f = \frac{x-1}{y}$ est-elle régulière en $P_0 = (1, 0)$? Est-elle régulière en P_∞ ? (On distinguera suivant $\mathrm{car}(k)$.)

(6) Quel est le degré de l'extension $k(f) \subset k(C)$? (On pourra chercher un polynôme annulateur de y sur $k(f)$.)

Question hors barème : le corps $k(C)$ est-il isomorphe à $k(T)$?
