ENS Lyon 2011 - 2012
Master 1

Algèbre Approfondie

29.11.2011

TD 10

Produit tensoriel de modules (suite)

Exercice 1.

1. Soit K un corps et soit $P \in K[X]$ un polynôme non constant. Si L est une extension finie de K, montrer l'existence d'un isomorphisme :
$$K[X]/(P(X)) \otimes_K L \simeq L[X]/(P(X)).$$
2. Montrer que l'algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à l'algèbre produit $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
3. Soit L/K une extension finie de degré n.
   (a) Montrer que l'extension est séparable si et seulement si l'algèbre $L \otimes_K M$ n'a pas d'élément nilpotent pour toute extension M/K, si et seulement si $L \otimes_K \bar{K}$ n'a pas d'élément nilpotent.
   (b) Montrer que l'extension est galoisienne si et seulement si les K-algèbres $L \otimes_K L$ et L^n sont isomorphes.

Exercice 2.

1. Calculer $\mathrm{Sym}(M)$ pour $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puis $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Soit A un anneau, et soit $M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que la suite
$$M \otimes_A \mathrm{Sym}(N) \longrightarrow \mathrm{Sym}(N) \longrightarrow \mathrm{Sym}(P) \longrightarrow 0,$$
est exacte, où la première flèche est donnée par l'application de multiplication.

Exercice 3.

1. (a) Soit A un anneau. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules. Montrer que la somme $\oplus_{i \in I} M_i$ est un module plat si et seulement si chaque module M_i est plat.
   (b) En déduire que l'anneau de polynômes $A[X]$ est un A-module plat.
2. Montrer que le produit tensoriel de deux modules A-plats est encore un module A-plat.
3. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, et soit M un A-module. Montrer que si M est plat, le $A/\mathfrak{a}$-module $M/\mathfrak{a}M$ est plat.
4. Soit M un A-module, et soit B une A-algèbre. Si M est un A-module plat, montrer que le produit tensoriel $M \otimes_A B$ est un B-module plat.

Exercice 4.

Soit A un anneau commutatif intègre. Soit M un A-module.

1. Montrer que si M est plat sur A, alors M est sans torsion, c'est-à-dire, pour tout $a \in A$ et pour tout $m \in M$, l'égalité $am = 0$ implique $a = 0$ ou $m = 0$.
2. Soit K un corps. On pose $A = K[X, Y]$. Soit M l'idéal (X, Y) de A. Montrer que M est sans torsion mais n'est pas plat sur A.
   Indication : on pourra remarquer que le quotient M/M^2 est un A/M-espace vectoriel de dimension 2, puis on pourra montrer qu'il existe une application A-bilinéaire $f : M \times M \to A/M$ telle que $f(X, Y) - f(Y, X) \neq 0$. On pourra alors en déduire que $X \otimes Y - Y \otimes X$ est non nul dans $M \otimes_A M$.

Exercice 5.

Un A-module P est dit *projectif* si, pour tout homomorphisme surjectif $f : M \to M'$ de A-modules, et pour tout homomrophisme $g : P \to M'$, il existe un homomorphisme $h : P \to M$ tel que $f \circ h = g$.

1. Montrer qu'un A-module est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre.
2. Montrer que le produit tensoriel de deux A-modules projectifs est encore un A-module projectif.
3. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et soit P un A-module projectif. Montrer que le produit tensoriel $P \otimes_A B$ est un B-module projectif.
4. Montrer que tout A-module projectif est plat.

Exercice 6.

Un A-module M est dit *fidèlement plat* sur A si pour tous A-modules M_1, M_2 et M_3, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i la suite $M_1 \to M_2 \to M_3$ est exacte ;

ii la suite $M \otimes_A M_1 \to M \otimes_A M_2 \to M \otimes_A M_3$ est exacte.

Soit M un A-module plat ; montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est fidèlement plat ;
2. pour tout A-module N non nul, le A-module $N \otimes_A M$ est non nul ;
3. pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $\mathfrak{m}M \neq M$.