ENS Lyon 2011 - 2012
MASTER 1

Algèbre Approfondie

06.12.2011

TD 11

Algèbre extérieure – Localisation

Exercice 1
Soit k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'une famille $(v_1, \ldots, v_r)$ de vecteurs de V est libre si et seulement si $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r(V)$.
2. Soient $v = (v_1, \ldots, v_r)$ et $w = (w_1, \ldots, w_r)$ deux familles libres de V. Montrer que $\mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Vect}(w)$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^*$ tel que $w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \lambda \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$.

Exercice 2
Fonctorialité des puissances symétrique et extérieure.
Soit A un anneau commutatif et $u : M \to N$ une application A-linéaire entre A-modules. Pour tout $n \geq 0$, montrer que l'application A-linéaire $T^n(u) : T^n(M) \to T^n(N)$ induit, par passage au quotient, des applications A-linéaires $\mathrm{Sym}^n(u) : \mathrm{Sym}^n(M) \to \mathrm{Sym}^n(N)$ et $\bigwedge^n(u) : \bigwedge^n(M) \to \bigwedge^n(N)$.

Exercice 3
Propriété universelle de l'algèbre extérieure.
Soit A un anneau commutatif et M un A-module. Soit B une A-algèbre non nécessairement commutative et $f : M \to B$ une application A-linéaire qui vérifie $f(m)^2 = 0$ pour tout $m \in M$.

1. Montrer la relation $f(m_2)f(m_1) = -f(m_1)f(m_2)$ pour tout $m_1, m_2 \in M$.
2. Montrer qu'il existe un unique morphisme de A-algèbres $\widehat{f} : \bigwedge(M) \to B$ prolongeant f, c'est-à-dire vérifiant $\widehat{f}(m) = f(m)$ pour tout $m \in M = \bigwedge^1(M)$.

Exercice 4
Soit A un anneau commutatif et M un A-module libre de rang n. Soit $u : M \to M$ un endomorphisme du A-module M. Montrer la relation

$$\det(\lambda \cdot I - u) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \lambda^{n-r} \, \mathrm{Tr}(\Lambda^r(u)) \qquad (\lambda \in A).$$

Indication : on pourra commencer par le cas où il existe une base de M dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 5
Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que l'anneau $S^{-1}A$ est nul si et seulement si S contient 0.
2. Soit $\rho : A \to S^{-1}A$ le morphisme canonique. Montrer que $\rho(a) = 0$ si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $sa = 0$.
3. En déduire que ρ est injectif si et seulement si S ne contient pas de diviseur de 0.

Exercice 6

Propriété universelle du localisé.

Soit A un anneau commutatif, S une partie multiplicative de A et $\rho : A \to S^{-1}A$ le morphisme canonique.

1. Montrer que le couple $(S^{-1}A, \rho)$ vérifie la propriété universelle suivante :
   Pour tout anneau commutatif B et tout morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f(S) \subset B^{\times}$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\widehat{f} : S^{-1}A \to B$ tel que $f = \widehat{f} \circ \rho$.
2. Montrer que si de plus f est injectif, alors $\widehat{f}$ est injectif.
3. *Application :* si A est un anneau intègre, de corps des fractions K, et si $0 \notin S$, montrer que $S^{-1}A$ s'identifie à un sous-anneau de K.

Exercice 7

Soit p un nombre premier et S la partie multiplicative de $\mathbf{Z}$ formée des entiers non divisibles par p.

1. Décrire l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)} := S^{-1}\mathbf{Z}$.
2. Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est un anneau local, et que son idéal maximal est engendré par p.
3. Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est principal, et que tout idéal non nul de $\mathbf{Z}_{(p)}$ est de la forme (p^n) avec $n \geq 0$.
4. Montrer que les résultats précédents restent valables si l'on remplace $(\mathbf{Z}, p)$ par (A, π) où A est un anneau principal et π un élément irréductible de A.

Exercice 8

Soit $f : A \to A'$ un morphisme surjectif d'anneaux. Si A est local et $A' \neq \{0\}$, montrer que l'anneau A' est aussi local.

Exercice 9

1. À quelle condition l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est-il local ?
2. Est-ce que tout sous-anneau d'un anneau local est local ?
3. Est-ce que tout quotient d'un anneau local est local ?

Exercice 10

Soit A un anneau commutatif, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que l'anneau quotient $A/\mathfrak{m}^n$ est un anneau local.

Exercice 11

Montrer qu'un anneau commutatif A est local si et seulement s'il satisfait la propriété :

$$\forall a, b \in A \quad : \quad a + b = 1 \;\Rightarrow\; a \in A^* \text{ ou } b \in A^*.$$

Exercice 12

Soit A un anneau intègre et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0.

1. Montrer que si A est principal, alors $S^{-1}A$ est principal.
2. Montrer que si A est factoriel (resp. euclidien), alors $S^{-1}A$ est factoriel (resp. euclidien).