ENS Lyon 2011 - 2012
MASTER 1

Algèbre Approfondie

13.12.2011

TD 12

Localisation d'anneaux et de modules, Anneaux de valuation discrète

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on considère un anneau A commutatif.

Exercice 1.

Soit S une partie multiplicative de l'anneau A. Soient I et J deux idéaux de A, montrer les égalités :

$$\begin{aligned} S^{-1}(I+J) &= S^{-1}I + S^{-1}J \\ S^{-1}(IJ) &= (S^{-1}I)(S^{-1}J) \\ S^{-1}(I \cap J) &= S^{-1}I \cap S^{-1}J. \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit A un anneau commutatif, et soit $S \subset A$ une partie multiplicative.

1. Si l'anneau A est principal, montrer que $S^{-1}A$ l'est aussi.
2. Si l'anneau A est factoriel, montrer que $S^{-1}A$ aussi. Montrer également que les éléments irréductibles de $S^{-1}A$ sont les éléments irréductibles p de A tels que $pA \cap S$ est vide.

Exercice 3.

1. Soit S une partie multiplicative de A. Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que cette suite induit une suite exacte de $S^{-1}A$-modules :

$$0 \to S^{-1}M \to S^{-1}N \to S^{-1}P \to 0.$$

2. Soit M un A-module. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) le module M est plat ;
   (b) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le $A_{\mathfrak{p}}$-module $M_{\mathfrak{p}}$ est plat ;
   (c) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le $A_{\mathfrak{m}}$-module $M_{\mathfrak{m}}$ est plat ;

Exercice 4.

Dans cet exercice, on suppose que l'anneau A est intègre.

1. Soit $a \in A$ un élément non nul. Vérifier que l'ensemble $S = \{1, a, a^2, ..., a^n, ...\}$ est une partie multiplicative de l'anneau A. On notera A_a l'anneau $S^{-1}A$.
2. Montrer l'existence d'un isomorphisme d'anneaux :

$$S^{-1}A \simeq A[T]/(aT - 1).$$

Exercice 5.

On note $\mathrm{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau A.

1. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal, appelé le *nilradical* de A.
2. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est contenu dans tout idéal premier de A.
3. Soit $s \notin \mathrm{Nil}(A)$. Soit $S = \{1, s, ..., s^n, ...\}$. En considérant les idéaux premiers de $S^{-1}A$, montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

Exercice 6.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Rad}(A)$ des éléments $a \in A$ tels que $1 + xa$ est inversible pour tout $x \in A$ forme un idéal de A, appelé le *radical de Jacobson* de A.
   Indication : on pourra utiliser la relation $1 + a(x + y) = (1 + ax)(1 + (1 + ax)^{-1}ay)$.
2. Montrer que le radical de Jacobson est égal à l'intersection des idéaux maximaux de A.
3. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A inclus dans $\mathrm{Rad}(A)$. Montrer que l'anneau A est local si et seulement si l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}$ est local.

Exercice 7.

Soit A un anneau local. Si M et M' sont deux A-modules de type fini, montrer l'équivalence :

$$M \otimes_A M' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ ou } M' = 0.$$

Exercice 8.

Soit A un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}$; soit π une uniformisante de A.

1. Montrer que le localisé de A en $\mathfrak{m}$ est canoniquement isomorphe à A.
2. Montrer que les idéaux non nuls de A sont précisément les idéaux de la forme $\mathfrak{m}^n = \pi^n A$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer : $\cap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = \{0\}$.
4. Notons k le corps résiduel de A. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, le quotient $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est un k-espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 9.

On note $\mathbb{C}[[T]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire des expressions de la forme $\sum_{i \geq 0} a_i T^i$, avec $a_i \in \mathbb{C}$.

1. Muni de la somme terme à terme et du produit de convolution, vérifier que l'ensemble $\mathbb{C}[[T]]$ est un anneau commutatif intègre.
2. Montrer que toute série formelle de terme constant non nul est inversible dans l'anneau $\mathbb{C}[[T]]$.
3. Montrer que tout idéal de l'anneau $\mathbb{C}[[T]]$ est de la forme (T^n), avec $n \geq 0$.
4. Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[[T]]$ est un anneau de valuation discrète. Quel est son idéal maximal ?
5. Montrer que le sous-anneau A de $\mathbb{C}[[T]]$ formé des séries entières de rayon de convergence > 0 est un anneau de valuation discrète.