Algèbre Approfondie

11.10.2011

TD 4

Extensions normales, correspondance de Galois

Exercice 1. Extensions normales.

Soit K un corps.

1. Montrer que toute extension de degré 2 de K est normale.
2. Soit L/K une extension algébrique. Soient E/K et M/K deux extensions intermédiaires supposées normales.
   (a) Montrer que l'extension $E \cap M$ est normale sur K.
   (b) Montrer que l'extension composée EM est normale sur K.

Exercice 2.

1. Soit K un corps, soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Si $L \subset \bar{K}$ est une extension de K, montrer qu'il existe une plus petite extension normale N/K dans $\bar{K}$ telle que N contienne L. On l'appelle la *clôture normale* de l'extension L/K dans $\bar{K}$.
2. Déterminer la clôture normale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$, dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

Exercice 3. Extensions quadratiques.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Caractériser les extensions de degré 2 de K.

Exercice 4. Groupe de Galois de $(X^2-2)(X^2-3)$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Déterminer le corps de décomposition L du polynôme $P(X) = (X^2-2)(X^2-3)$ sur $\mathbb{Q}$, puis son groupe de Galois.
2. Factoriser le polynôme P sur les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
3. Trouver un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ isomorphe à G, en numérotant les racines de P. Que se passe-t-il si l'on modifie la numérotation des racines ?

Exercice 5. Groupe de Galois de X^4-2 sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que le corps de décomposition du polynôme $P(X) = X^4-2$ sur $\mathbb{Q}$ est le corps $L = \mathbb{Q}(2^{1/4}, i)$. En déduire que le groupe de Galois G de P est d'ordre 8.
2. Décrire les éléments de G.
3. Montrer que le groupe G est isomorphe au groupe diédral D_4. Expliciter un isomorphisme entre ces groupes.

Exercice 6.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, existe-t-il un polynôme de degré $2n$ à racines distinctes et non rationnelles dont le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$?

2. Pour tout entier $n \geq 1$, existe-t-il un polynôme de degré $2n$ à racines distinctes et non rationnelles dont le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Exercice 7. Extensions cubiques de $\mathbb{Q}$.

Soit $P(X) = X^3 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$. On suppose que P n'a aucune racine dans $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que le polynôme P est irréductible et séparable sur $\mathbb{Q}$.

   Soit G le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$, et soient α_1, α_2 et α_3 les racines de P dans $\mathbb{C}$. Pour tout $\sigma \in G$, on note $\tilde{\sigma}$ l'unique permutation de $\mathfrak{S}_3$ telle que $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\tilde{\sigma}(i)}$.

2. On pose $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in \mathbb{C}$.
   (a) Pour tout $\sigma \in G$, montrer la relation $\sigma(\delta) = \epsilon(\tilde{\sigma})\delta$, où $\epsilon(\tilde{\sigma})$ est la signature de $\tilde{\sigma}$.
   (b) Montrer : $\delta^2 = -4a^3 - 27b^2 \in \mathbb{Q}$ (δ^2 est le discriminant du polynôme P).
3. Déduire des questions précédentes :
   (a) si $-4a^2 - 27b^2$ est un carré dans $\mathbb{Q}$, alors G est isomorphe au groupe $\mathfrak{A}_3$;
   (b) sinon, G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
4. <u>Exemples.</u> Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes suivants :
   – $P_1(X) = X^3 - X + 1$;
   – $P_2(X) = X^3 - 3X + 1$.

Exercice 8.

1. On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 4X^3 - 2$. On note G son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$.
   (a) Vérifier que le polynôme P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En déduire que le groupe G contient un élément d'ordre 5.
   (b) Montrer que P possède 3 racines réelles et 2 racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$. En déduire que l'image du groupe G dans $\mathfrak{S}_5$ contient une transposition.
   (c) Déduire des questions précédentes que le groupe G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ est engendré par le p-cylce $[123...p]$ et une transposition.
   (b) Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible qui a exactement deux racines dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ contient une transposition. Si de plus P est de degré p, montrer que son groupe de Galois est isomorphe à $\mathfrak{S}_p$.

Exercice 9.

Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme cyclotomique $\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Expliciter un isomorphisme.