ENS Lyon 2011 - 2012
Master 1

Algèbre Approfondie

04.11.2011

TD 7

Résolubilité par radicaux

Exercice 1. Sur les groupes résolubles.

1. Soit G un groupe fini.
   (a) On note $\{D^i(G)\}_{i\geq 0}$ la suite définie par récurrence par $D^0(G)=G$ et $D^{i+1}(G)=D(D^i(G))$ pour tout $i\geq 0$. Montrer que le groupe G est résoluble si et seulement s'il existe un entier $n\geq 0$ tel que $D^n(G)=\{1\}$.
   (b) Si G est résoluble, montrer que tout sous-groupe de G est résoluble.
   (c) Montrer que les groupes $\mathfrak{A}_n$ (groupe alterné) et $\mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique) ne sont pas résolubles pour $n\geq 5$. On pourra utiliser le fait que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que tout p-groupe est résoluble.
3. (a) Montrer que tout groupe d'ordre pq est résoluble, avec p et q premiers distincts.
   (b) Monter que tout groupe d'ordre pqr est résoluble, avec p, q et r premiers distincts.
   (c) Montrer que tout groupe d'ordre p^2q est résoluble, avec p, q premiers distincts.
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que tout groupe G de cardinal $n<60$ est résoluble.

Exercice 2. Théorie d'Artin-Schreier.

1. **Version additive du Théorème 90 de Hilbert.** Soit K un corps. Soit L/K une extension cyclique de degré $n\geq 1$; soit G son groupe de Galois. On note $\mathrm{Tr}_{L/K}: L\to K$ l'application trace. Soit σ un générateur de G. Pour tout $\beta\in K$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{rl} (1) & \mathrm{Tr}_{L/K}(\beta)=0 \\ \Leftrightarrow\ (2) & \exists\alpha\in K\ :\ \beta=\alpha-\sigma(\alpha). \end{array}$$

2. **Théorème d'Artin-Schreier.** Soit p un nombre premier, soit K un corps de caractéristique p. On fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K.
   (a) Soit L/K une extension de degré p. Montrer qu'il existe $\alpha\in L$ tel que $L=K(\alpha)$ avec $\alpha^p-\alpha=a$ pour un certain élément $a\in K$.
   (b) Réciproquement, soit $a\in K$. On considère le polynôme $P_a(X)=X^p-X-a$.
      i. Montrer que P_a possède p racines distinctes dans $\bar{K}$.
      ii. Montrer que l'on est dans une des deux situations suivantes :
         – soit P_a possède une racine dans K, auquel cas il a toutes ses racines dans K ;
         – soit P_a est irréductible sur K. Dans ce cas, si $\alpha\in\bar{K}$ est une racine de P_a, l'extension $K(\alpha)/K$ est cyclique de degré p.

Exercice 3.

Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit a un élément non nul de K. Pour tout entier $n\geq 1$, montrer que le polynôme X^n-a est résoluble par radicaux sur K.

Exercice 4.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré premier p. On suppose que le polynôme P possède deux racines complexes et $p-2$ racines réelles. On note L le corps de décomposition de P sur K, et G son groupe de Galois.

1. Montrer que p divise le cardinal de G. En déduire que le groupe G contient un p-cycle.
2. Montrer que G contient un morphisme permutant les deux racines complexes et laissant les autres racines invariantes.
3. En déduire que le groupe G est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.
4. Les polynômes suivants sont-ils résolubles par radicaux sur $\mathbb{Q}$?
   (a) $X^5 - 4X^3 - 2$;
   (b) $X^5 - 14X + 7$;
   (c) $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$.

Exercice 5.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$ un polynôme irréductible de $K[X]$. On note x, y, z les trois racines de P dans $\mathbb{C}$, et $D = -4p^3 - 27q^2$ le discriminant de P.
Soit u un élément de $K[x]$ non contenu dans K. On écrit $u = a + bx + cx^2$, et l'on note $Q(X) = X^3 + a'X^2 + b'X + c'$ le polynôme minimal de u sur K.

1. Écrire a' et b' en fonction de a, b, c, p, q.
2. Montrer que le corps $K[x]$ est une extension radicale de K si et seulement si $-3D$ est un carré dans K.
3. Soit $\alpha = \cos(2\pi/7)$. L'extension $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est-elle radicale ? Est-elle résoluble par radicaux ?

Exercice 6. **Équation générale de degré n.**

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer qu'il existe n nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $E = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble de n éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soit $L = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$. On note $\mathfrak{S}_n(E)$ le groupe des permutations de E. Montrer que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n(E)$ définit un isomorphisme de corps $\varphi_\sigma : L \to L$ qui envoie x_i sur $\sigma(x_i)$.
3. Montrer que le groupe de Galois du polynôme $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Sous quelle condition le polynôme P est-il résoluble par radicaux ?

Exercice 7.

Si K est un corps de caractéristique positive, on peut définir les extensions par radicaux de K de la même façon qu'en caractéristique nulle.
Montrer que tout polynôme sur un corps fini est résoluble par radicaux.